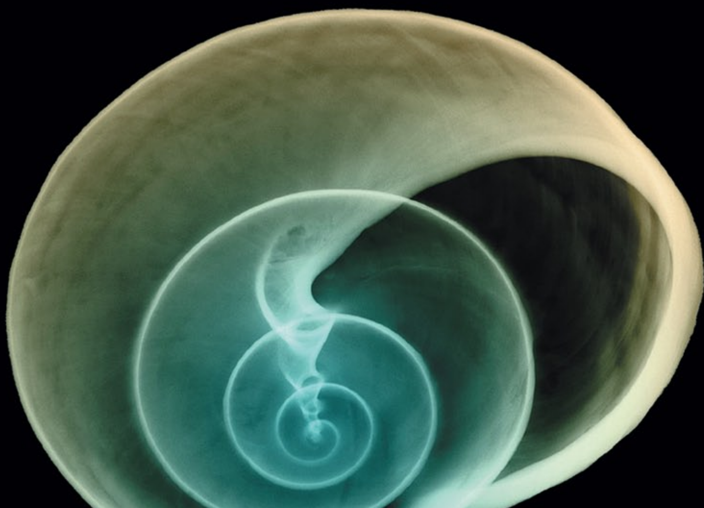
50 идей,
о которых нужно знать

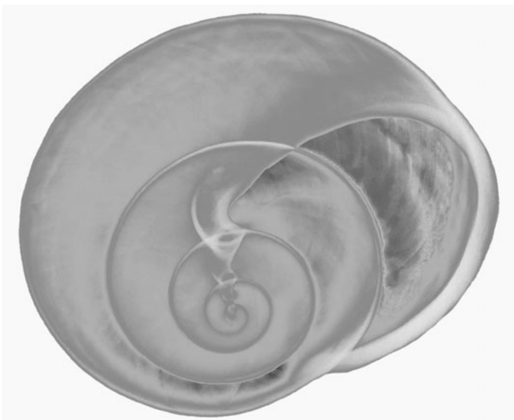
МАТЕМАТИКА



Тони Крилли

Тони Крилли

МАТЕМАТИКА



50 ИДЕЙ, *о которых нужно знать*

phantom press

Оглавление

Введение

Математика – предмет обширный, и никому не под силу знать ее всю. Но ее можно изучать, искать в ней собственный путь, и нам откроются вопросы, не первое столетие волнующие математиков разных культур и времен.

И на древнюю, и на современную математику влияли и массовая культура, и политика. Современная система чисел, обросшая ракушками древности, происходит из Индии и Аравии. Шестидесятеричная система счисления Древнего Вавилона II–III тысячелетий до нашей эры по-прежнему жива: в минуте у нас 60 секунд, а в часе 60 минут; прямой угол по-прежнему равен 90°, а не ста, как в свое время решила для себя Франция, после Революции устремившись к десятичной системе во всем.

Победы техники наших дней зиждутся на математике; никакой доблести в плохой успеваемости по этому предмету не осталось вовсе – прошли те времена. Школьная математика – отдельное занятие, нацеленное, в основном, на сдачу экзаменов. Плотное расписание тоже не способствует погружению в предмет, а математика не терпит поспешности. Для впитывания математических идей требуется время. Некоторые величайшие математики бывали до крайности непроворны в своих попытках постичь глубинные принципы этой дисциплины.

Вы тоже не спешите поскорее прочесть эту книгу. Неторопливо изучите предложенные в тексте идеи – вам, вероятно, они уже знакомы, но теперь, быть может, вы поймете их подлинный смысл. Начните с «Нуля» – или с любой другой главы и странствуйте меж островов математического знания. Например, вы узнаете много нового о теории игр или о волшебных квадратах. А можете двинуться от золотого сечения к знаменитой последней теореме Ферма – или любым иным путем.

В математике сейчас наступило интереснейшее время. Кое-какие ключевые задачи этого предмета были решены буквально недавно. Современные компьютерные технологии помогли с некоторыми загадками, а в отношении других они по-прежнему бессильны: проблему четырех красок решили компьютеры, а гипотеза Римана, о которой мы говорим в последней главе, ни нам, ни нашим компьютерам так и не поддалась.

В математике, как и в искусстве или музыке, были и есть свои гении, однако они – еще не вся история предмета. Подлинный прогресс этой науки – накопленная за века работа многих. Выбор 50 тем для разговора – вполне субъективный, но я постарался соблюсти равновесие. В книгу включены как повседневные, так и более сложные представления, теоретическая и прикладная математика, абстрактная и предельно конкретная, древняя и новая. Математика – единый предмет, и главная трудность при составлении этой книги заключалась даже не в том, что именно в нее включить, а что оставить за скобками. Можно было бы запросто собрать и 500 идей, но и 50 – вполне славное начало вашей математической карьеры.

01 Нуль

Еще детьми мы делаем первые неуклюжие шаги в стране чисел. Мы узнаем, что 1 — начало «численного алфавита», что с единицы начинается последовательность натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, 5, ... Натуральные числа возникают при счете чего угодно — яблок, апельсинов, бананов, груш. И лишь позднее мы учимся считать яблоки в том ящике, где их нет.

Даже древние греки, квантовыми скачками развивавшие науку вообще и математику в частности, и древние римляне, знаменитые своими инженерными свершениями, никак не могли сладить с подсчетом яблок в пустом ящике. «Ничто» никак не могло быть поименовано. Римляне разобрались с тем, как записывать *I, V, X, L, C, D* и *M*, но где же у них был 0? «Ничто» они считать не умели.

Утверждение нуля Применять символ, обозначающий «ничто», начали, как принято считать, тысячи лет назад. Нуль разнообразно использовала майянская цивилизация, существовавшая на территории современной Мексики. Чуть погодя астроном Клавдий Птолемей, находясь под влиянием вавилонян, использовал нуль в своей системе счисления в качестве заполнителя, заглушки. Нуль в таком случае применялся для отделения одного числа от другого при написании в ряд – 75 и 705, допустим, – чтобы не полагаться на контекст, как делали древние вавилоняне. Подобную функцию в языке выполняет запятая – она помогает *прочитывать* написанное правильно, и так же, как есть свои правила расстановки запятых, нуль должен ставиться по определенным правилам.

Индийский математик VII века Брахмагупта считал нуль «числом», т. е. не просто заполнителем пустого места, и ввел некоторые правила его

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

700 до н. э.

Вавилоняне применяют нуль как символ-заполнитель

628

Брахмагупта применяет нуль как число и формулирует правила его использования применения. Например, «сумма положительного числа и нуля — положительна», «сумма двух нулей равна нулю». Представления Брахмагупты о нуле как о числе, а не о заглушке были для его времени крайне прогрессивны. На Западе индо-арабскую систему чисел, включавшую нуль как число, распространил Леонардо Пизанский — Фибоначчи; ей он посвятил свой труд 1202 года *«Liber Abaci»* («Книга абака»*). Фибоначчи вырос в Северной Африке, был обучен индо-арабской арифметике и осознал великую пользу символа «0», написанного вместе с индийскими цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

* «Абаком» Фибоначчи называл арифметические вычисления.

С введением нуля в систему чисел встал вопрос, которого Брахмагупта коснулся лишь слегка: как же обращаться с этим «чужаком»? Зачин был индийским математиком положен, однако его рекомендации остались довольно смутными. Как же поточнее ввести нуль в существовавшую уже тогда арифметическую систему? Некоторые правила были вполне очевидны: при сложении и умножении с нулем проблем не возникало, а вот вычитание и деление с участием этого «иностранца» оказывались затруднительны. Для того чтобы нуль не конфликтовал с остальной общепринятой арифметикой, необходимо было дополнить понятийный аппарат.

Как обходиться с нулем? Сложение и умножение на нуль просты и незатейливы: можете прибавить 0 к 10 и получить сто, но в данном случае мы имеем в виду именно «прибавить» в самом не умозрительном смысле слова. Сложение нуля с любым числом ничего в этом числе не меняет, а умножение на нуль любого числа всегда дает нуль в ответе. Например, $7 + 0 = 7$, а $7 \times 0 = 0$. Вычитание — простая операция, хотя в результате могут возникнуть отрицательные числа: $7 - 0 = 7$, но $0 - 7 = -7$, а вот с делением на нуль все непросто.

Вообразим, что нам надо измерить некоторую длину при помощи мерной рейки. Положим, у рейки этой 7 единиц-делений. Нам надо выяснить, сколько таких реек уложится по заданной длине. Если эта длина — 28 единиц, то ответом будет результат деления 28 на 7, т. е. $28 \div 7 = 4$. Еще лучше записать это действие так:

$$\frac{28}{7} = 4,$$

и тогда мы можем перекрестно умножить 7 на 4 и записать то же самое в виде умножения: $28 = 7 \times 4$. Какой же смысл мы можем извлечь из деления нуля на семь? Обозначим результат такого деления буквой a и получим следующее выражение:

$$\frac{0}{7} = a$$

830

Махавира излагает соображения о том, как нуль взаимодействует с другими числами

1100

Бхаскара применяет нуль как алгебраический символ и пытается показать, как с ним обращаться

1202

Фибоначчи применяет нуль, дописывая его после индо-арабских цифр от 1 до 9, но не как отдельное число, а как дополнение к ним

Перекрестно умножив, получим $0 = 7 \times a$. Таким образом, у a может быть лишь одно значение — нуль, потому что, если при умножении одного числа на другое получается нуль, одно из этих чисел обязано быть нулем. Очевидно, 7 не равно нулю, значит, нулю равно a.

Но не это главная загвоздка с нулем. Опасность заключается в делении на нуль. Если мы попытаемся обращаться с выражением $^7/_0$ так же, как и с $^0/_7$, то получим вот такое уравнение:

$$\frac{7}{0} = b.$$

Умножаем перекрестно и получаем $0 \times b = 7$ — и в итоге упираемся в нонсенс: $0 = 7$. Допуская возможность существования численного результата $^7/_0$, мы рискуем устроить целое светопреставление в мире чисел. Выход один — считать результат выражения $^7/_0$ неопределимым. Небезопасно пытаться извлечь какой бы то ни было смысл из операции деления семи (или любого другого числа, не равного нулю) на нуль, поэтому мы попросту не допускаем этой операции. По сходной причине недопустимо ставить запятую в сере,дине слова, не плодя при этом бессмыслицу.

Индийский математик XII века Бхаскара II, последователь Брахмагупты, считал результатом деления на нуль бесконечность. В этом есть здравое зерно: если делить число на другое число, но очень маленькое, в ответе получим очень большое число. Например, 7, деленное на одну десятую, дает нам 70, на одну сотую — 700. Чем меньше знаменатель дроби, тем больше будет результат деления. В предельном случае — т. е. при равенстве знаменателя нулю — ответом будет бесконечность. Однако попытка впихнуть в эту задачу бесконечность не очень плодотворна: бесконечность (стандартное обозначение — ∞) не подчиняется обычным правилам арифметики и не является числом в обычном смысле слова.

Если 7/0 представляет арифметическую проблему, что же нам делать с еще более странным выражением — $^0/_0$? Если $^0/_0 = c$, перекрестным умножением мы получим уравнение $0 = 0 \times c$, из которого следует, что $0 = 0$, а это не слишком познавательный результат, хотя и не бессмысленный. Таким образом, приходим к выводу, что $^0/_0$ дает в результате что угодно: выражаясь вежливым математическим языком, результат такого деления — «неопределенный».

В итоге получаем вывод: лучше исключить деление на нуль из наших вычислительных операций. Арифметика прекрасно себя чувствует без такого деления.

Что нам проку от нуля? Нам без него — как без рук. От нуля зависит прогресс науки. Мы оперируем понятиями «нулевой меридиан», «нуль градусов» по температурной шкале, «нулевая энергия», «нулевая гравитация». Нуль вошел и в обиходный язык: мы говорим «час ноль» и «нулевая терпимость».

Есть у нуля применения и пограндиознее. Будете на 5-й авеню в Нью-Йорке – зайдите в Эмпайр-стейт-билдинг, и вы окажетесь в величественном фойе на этаже № 1. Все этажи пронумерованы числами – 1 (первый), 2 (второй) и так далее вплоть до 102 (сто второго). В Европе в домах есть нулевой этаж, но его так называют неохотно.

Математики без нуля не смогли бы ничего поделать. Он в самом сердце математических понятий, благодаря которым вообще существуют система счисления, алгебра и геометрия. В линии чисел нуль отделяет положительные числа от отрицательных, и поэтому у него привилегированное положение. В десятичной системе нуль служит символом-заполнителем и позволяет нам оперировать и огромными числами, и ничтожно малыми.

Много чего из ничего

Сумма нуля и положительного числа — положительное число.

Сумма нуля и отрицательного числа — отрицательное число.

Сумма положительного числа и отрицательного числа — разность между ними. Если они равны друг другу, результат — нуль.

Деление нуля на отрицательное или положительное число дает в результате нуль или может быть записано в виде дроби с нулем в числителе и конечным числом в знаменателе.

Брахмагупта, 628 г. н. э.

За сотни лет нуль прижился и получил широкое распространение, стал одним из величайших изобретений человечества. Американский математик XIX века Дж. Б. Хэлстед воспел нуль как двигатель прогресса в духе Шекспирова «Сна в летнюю ночь»: «Воздушному ничто – ни места, ни прозванья, – виденью, символу, но дружественной силе – как и самим индусам, что его создали».

Когда нуль только появился, он, должно быть, производил странное впечатление, но математики привыкли вцепляться в диковинные понятия, а это, как показывает время, – полезная привычка. Современный эквивалент понятия нуля можно наблюдать в теории множеств (*множество* – некоторое собрание отдельных элементов). В рамках этой теории символом ∅ обозначают множество, в котором нет никаких элементов; его называют «пустым множеством». Вот уж странная идея, но, как и нуль, она незаменима.

В сухом остатке: Ничто — это что-то

02 Системы чисел

Система чисел — способ обходиться с концепцией количеств. Разные культуры в разные времена придумали много методов в диапазоне от простого «один, два, три, куча» до сложных десятичных обозначений, которыми пользуемся мы.

Шумеры и вавилоняне, обитавшие на территории современных Сирии, Иордании и Ирака около 4000 лет назад, применяли в быту позиционную систему счисления. Мы называем ее так, потому что она позволяла определять «число» по расположению символов. Единицей счисления они полагали 60, и ныне мы называем эту систему шестидесятеричной. Следы шестидесятеричной системы по-прежнему в ходу: 60 секунд в минуте, 60 минут в часе. Измеряя углы, мы все так же оперируем полным углом в 360°, несмотря на попытку метрической системы считать его равным 400° (прямой угол при этом оказывается равен 100°).

Хотя наши далекие предки склонны были подходить к числам сугубо практически, есть и некоторые свидетельства того, что в ранних культурах существовал интерес к математике как таковой и древние люди урывали время от повседневных забот, чтобы повозиться с математическим знанием. Эти первые исследования включают то, что мы ныне зовем «алгеброй», а также свойства геометрических фигур.

Египетская система XIII века до н. э. была десятичной и оперировала иероглифическими значками. Любопытно отметить, что египтяне даже развили систему обращения с дробями, но современный позиционный десятичный метод обозначения пришел к нам из Вавилона, а потом его усовершенствовали индийцы. Преимущество этого метода — возможность обозначать как очень маленькие, так и громадные числа. Применение индо-арабских цифр от 1 до 9 делает

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

30 000 до н. э.

Люди палеолита в Европе наносят цифры на кости животных

2000 до н. э.

Вавилоняне применяют символьную систему для обозначения чисел счисление достаточно простым. В этом можно наглядно убедиться, сравнив эту систему с римской. Римлян она вполне устраивала, но лишь знатоки могли применять ее для вычислений.

Римская система Основные символы, применявшиеся римлянами, – «десятки» (*I*, *X*, *C* и *M*) и их «половины» (*V*, *L* и *D*). Эти символы ставили один за другим в разных комбинациях, и получались разные числа. Есть предположение, что написание *I*, *II*, *III* и *IIII* возникло из сходства с нашими четырьмя пальцами, *V* – из сходства с кистью руки; если приложить одну руку к другой тыльной стороной, получится *X*, а это как раз десять пальцев. *C* происходит от *centum*, а *M* – от *mille*, что на латыни означает «сто» и «тысяча» соответственно. Римляне применяли для обозначения половины символ *S*, а система дробных чисел у них была двенадцатеричная.

Числа в римской системе составлялись по принципу «перед и после», но единых правил так и не сложилось. Древние римляне писали *IIII*, а *IV* придумали позже. Комбинация *IX*, похоже, применялась, но *SIX* при этом означала $8\,{}^{1}/_{2}$. Справа приведены основные числа римской системы – с некоторыми средневековыми дополнениями:

Римские числа

Римская империя	Средневековые дополнения
S половина	
I один	
V пять	$\bar{V}$ пять тысяч
X десять	$\bar{X}$ десять тысяч
L пятьдесят	$\bar{L}$ пятьдесят тысяч
C сто	$\bar{C}$ сто тысяч
D пятьсот	$\bar{D}$ пятьсот тысяч
M тысяча	$\bar{M}$ миллион

Читать римские цифры непросто. Например, значение *MMMCDXLIIII* становится понятно только после мысленной расстановки скобок: (*MMM*)(*CD*)(*XL*)(*IIII*), и тогда можно прочесть это число как 3000 + 400 + 40 + 4 = 3444. А теперь попробуйте сложить *MMMCDXLIIII* и *CCCXCIIII*. Римлянин, обученный премудростям арифметики, владел всякими уловками и хитростями, но нам трудно обрести правильный ответ, не прибегая к переводу этих чисел в десятичную систему и лишь потом переведя ее обратно в римские обозначения:

Сложение

3444	→	*MMMCDXLIIII*
+ 394	→	*CCCXCIIII*
= 3838	→	*MMMDCCCXXXVIII*

600
В Индии возникает система записи чисел — предтеча современной

1200
Распространяется индо-арабская система записи цифр от 1 до 9, с включением нуля

1600
Символы десятичной системы счисления принимают современный вид

А умножение двух чисел – еще сложнее и в некоторых случаях невозможно, если пользоваться исходной системой, даже для самих римлян. Чтобы умножить 3444 на 394, нам потребуются средневековые элементы написания.

Умножение

3444	→	*MMMCDXLIIII*
× 394	→	*CCCXCIIII*
= 1 356 936	→	$\overline{\mathit{MCCCLV}}\mathit{MCMXXXVI}$

У римлян нуль никак особо не обозначался. Если бы вы попросили римлянина-вегетарианца запечатлеть, сколько бутылок вина он выпил за день, он мог бы написать «III», но спроси вы, сколько он съел цыплят, «0» он бы вам не изобразил. Остатки римского написания чисел сохранились в номерах страниц некоторых книг (не этой) и на камнях в основании зданий. Некоторые численные конструкции никогда римлянами не употреблялись – например, *MCM* (1900), – а были введены стиля ради в позднейшие времена. Римляне написали бы *MDCCCC*. Король Франции Людовик XIV предпочитал написание *XIIII* и ввел правило, по которому на всех часах четыре часа должны были обозначаться символом *IIII*.

Часы Людовика XIIII

Десятичные целые числа Под «числами» вообще мы привыкли подразумевать именно десятичные числа. Десятичная система имеет в качестве основания десять и оперирует цифрами от 0 до 9. На самом деле система эта зиждется на «десятках» и «единицах», но единицы включены в десятку ($10^0 = 1$). Записывая число **394**, например, мы можем описать его десятичное значение так: оно состоит из **3** сотен, **9** десятков и **4** единиц:

$$\mathbf{394} = \mathbf{3} \times 100 + \mathbf{9} \times 10 + \mathbf{4} \times 1.$$

Можно записать это число и в виде степеней 10 (или умножением чисел на самих себя):

$$\mathbf{394} = \mathbf{3} \times 10^2 + \mathbf{9} \times 10^1 + \mathbf{4} \times 10^0,$$

где $10^2 = 10 \times 10$, $10^1 = 10$ и – отдельно договоримся – $10^0 = 1$. В этом выражении мы еще отчетливее видим то самое *десятичное* основание нашей привычной системы, которая делает вполне прозрачными сложение и умножение.

Начало десятичности До сих пор мы говорили о целых числах. А как десятичная система обращается с частями чисел – например, с $^{572}/_{1000}$?

$$\frac{572}{1000} = \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000},$$

т. е. мы можем обращаться с величинами, обратными 10, 100, 1000, как с отрицательными степенями 10:

$$\frac{572}{1000} = 5 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3},$$

и записать это число как **,572**, где запятая означает начало отрицательных степеней десяти. Если добавить это к десятичному выражению 394, получим десятичный эквивалент $394^{572}/_{1000}$, т. е. попросту говоря 394,572.

Для очень больших чисел десятичное выражение может оказаться довольно длинным, и тогда мы обращаемся к «научной записи». Например 1356936892 можно записать так: $1{,}356936892 \times 10^{9}$; частенько в калькуляторах и компьютерах встречается и такой вариант: 1,356936892 × 10E9, где девятка в показателе степени на единицу меньше количества цифр, входящих в исходное число, а буква «E» — сокращение от «показателя степени» (англ. *exponential*). Иногда нам приходится иметь дело с еще большими числами — например, если речь идет о количестве атомов водорода в видимой Вселенной. Это количество оценивается как $1{,}7 \times 10^{77}$. А $1{,}7 \times 10^{-77}$, где степень отрицательна, — это очень маленькое число, но и с ним научная запись легко справляется. Не стоит даже пытаться представить себе такие числа в римских значках.

Степени двойки	В десятичной системе
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024

Нули и единицы Десятичная система счисления — ходовой бытовой материал, однако для некоторых целей потребны иные. Двоичная система, в основании которой двойка, — ключевая для современных компьютерных технологий. Красота двоичной системы в том, что она может выразить любое число при помощи лишь двух символов — 0 и 1. Издержка этой системы: запись числа временами получается очень длинная.

Как выразить **394** в двоичной системе? Здесь нам придется обращаться со степенями двойки, и, повозившись, получим:

$$\mathbf{394} = \mathbf{1} \times 256 + \mathbf{1} \times 128 + \mathbf{0} \times 64 + \mathbf{0} \times 32 + \mathbf{0} \times 16 + \mathbf{1} \times 8 + \mathbf{0} \times 4 + \mathbf{1} \times 2 + \mathbf{0} \times 1,$$

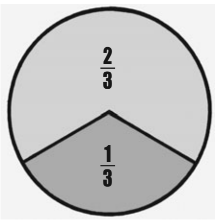
а теперь прочитаем только нули и единицы и получим для **394** выражение **110001010**.

Двоичная запись чисел бывает длинновата, и поэтому применяются и иные системы счисления. Например, восьмеричная (основание — 8) и шестнадцатеричная (основание — 16). В восьмеричной системе мы оперируем лишь символами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, а в шестнадцатеричной — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. 10 отвечает букве A, а значит, число **394** в этой системе можно записать (оперируя степенями шестнадцати) как 18A (394 = 1 × 256 + 8 × 16 + A). Просто, как ABC, верно? Но не будем забывать, что ABC в десятичной системе — это 2748!

В сухом остатке: Записываем числа

03 Дроби

Дробь — это буквально «дробное число». Чтобы грамотно разделить целое число, нужно записать его в виде дроби. Обратимся к традиционному примеру — пресловутому пирогу — и разделим его на три части.



Человек, которому достается две части пирога из трех, получает долю в $^2/_3$. Неудачнику достанется лишь $^1/_3$. Если сложить обе порции, т. е. доли двух претендентов на пирог, то $^2/_3 + ^1/_3 = 1$, а единица — целый пирог.

Вот вам еще пример. Вы, вероятно, посещали разные распродажи и видели, допустим, сорочки за четыре пятых исходной цены. Эту дробь записывают вот так: $^4/_5$. Можно также сказать, что скидка составляет одну пятую от исходной цены. Записываем: $^1/_5$. Складываем $^1/_5$ и $^4/_5$ и получаем 1 — это исходная цена.

Дробь всегда выглядит как целое число «над» целым числом. Нижнее число называется «знаменателем», оно обозначает, на сколько частей делится целое. Верхнее число — «числитель», оно указывает на то, сколько взято частей от целого. Таким образом, в официальном написании дробь всегда выглядит так:

$$\frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель}},$$

В случае с пирогом вам, вероятно, захочется съесть $^2/_3$, где 3 — знаменатель, а 2 — числитель. $^2/_3$ состоит из двух долей, каждая в $^1/_3$.

Бывают еще дроби вроде $^{14}/_5$ (они называются неправильными дробями), где числитель больше знаменателя. Делением 14 на 5 мы получаем 2 и еще 4 в остатке, и этот результат можно записать в виде

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1800 до н. э.
Дроби применяются в Древнем Вавилоне

1650 до н. э.
Египтяне оперируют аликвотными дробями (долями единицы)

смешанной дроби: $2\,^4/_5$. В нее входит целое число 2 и «правильная» дробь $^4/_5$. В давние времена ее иногда записывали как $^4/_5 2$.

Дроби обычно представляют в таком виде, чтобы у числителя и знаменателя («верхнего» и «нижнего» чисел) не было общих делителей. Например, у числителя и знаменателя дроби $^8/_{10}$ есть общий делитель, равный 2, потому что $8 = 2 \times 4$ и $10 = 2 \times 5$. Если мы запишем дробь $^8/_{10}$ как $^{2 \times 4}/_{2 \times 5}$, то двойки можно сократить и получить равенство: $^8/_{10} = {}^4/_5$, т. е. более простую форму с тем же значением. Математики называют дроби «рациональными числами», потому что они суть соотношение *(ratio)* двух чисел. Рациональные числа древние греки называли «мерами».

Складывание и умножение Довольно любопытно в дробях вот что: перемножать их проще, чем складывать. Умножение целых чисел – такая головная боль, что для этого пришлось наизобретать уйму хитрых приемов. А у дробей больше загвоздок со сложением, и там есть над чем подумать.

Начнем с умножения. Если вы покупаете сорочку за четыре пятых начальной цены в 30 фунтов, вы заплатите в итоге 24 фунта. 30 фунтов мы делим на 5 частей по 6 фунтов каждая, и четыре из этих пяти частей, т. е. $4 \times 6 = 24$, и есть сумма, которую вам придется выложить за покупку.

Если же управляющий магазином выяснит, что сорочки совсем не продаются, опустит цену еще ниже и станет продавать их за $^1/_2$ от скидочной цены, и сорочка теперь достанется вам всего за 12 фунтов. $^1/_2 \times {}^4/_5 \times 30$ даст в результате 12. Для умножения одной дроби на другую нужно просто перемножить числители друг с другом и знаменатели – друг с другом:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{1 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{10},$$

Если бы управляющий произвел оба понижения цены одним махом, он бы рекламировал уценку сорочек до четырех десятых от начальной цены 30 фунтов. Это и есть $^4/_{10} \times 30$, т. е. 12 фунтов.

Сложение двух дробей – другое дело. Сложение $^1/_3$ и $^2/_3$ еще куда ни шло, потому что у них одинаковые знаменатели. Мы попросту складываем числители, получаем $^3/_3$, т. е. единицу. Но как нам сложить две трети пирога и четыре пятых? Как нам обойтись с выражением $^2/_3 + {}^4/_5$? Вот красота была бы, если б $^2/_3 + {}^4/_5 = {}^{2+4}/_{3+5} = {}^6/_8$, однако так не выйдет.

100	1202	1585	1700
В Китае разработана система вычислений с дробями	Леонардо Пизанский (Фибоначчи) распространяет современную форму записи дробей — с дробной чертой	Фламандский математик Симон Стевин вводит теорию десятичных дробей	Дробная черта — в широком использовании (как в $^a/_b$)

Сложение дробей требует совсем иного подхода. Чтобы сложить $^2/_3$ и $^4/_5$, нужно сначала записать обе дроби так, чтобы у них был *одинаковый* знаменатель. Сначала умножим и числитель, и знаменатель $^2/_3$ на 5 и получим $^{10}/_{15}$. Затем аналогично умножим $^4/_5$ на 3 и получим $^{12}/_{15}$. Теперь у обеих дробей в знаменателе 15, и для их сложения нужно сложить их числители:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15},$$

Перевод в десятичный вид В мире науки и во многих областях прикладной математики наиболее предпочтительна десятичная форма записи дробей. Дробь $^4/_5$ – то же, что и дробь $^8/_{10}$, в знаменателе которой – 10, а значит, мы можем записать ее в виде десятичной – 0,8.

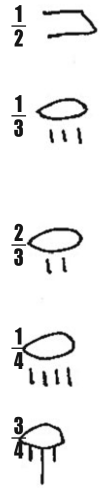
Дроби, у которых в знаменателе 5 или 10, переводятся в десятичный вид легко. Но как нам привести к десятичному виду, например, $^7/_8$? Для этого необходимо помнить, что деление одного целого числа на другое либо происходит нацело, либо в процессе деления возникает так называемый остаток.

Вот рецепт приготовления десятичной дроби из $^7/_8$:

– попробуйте разделить 7 на 8. Не делится – ну или можно сказать, что 7 делится на 8 нуль раз и в остатке 7. Запишем это в виде нуля с запятой после него;
– теперь разделим 70 на 8 (остаток предыдущего деления, умноженный на 10). Получим в результате 8: 8 × 8 = 64, поэтому ответ равен 8, а остаток от деления 6 (70 – 64). Запишем этот результат в ранее полученный: 0,8;
– затем разделим 60 на 8 (остаток предыдущего деления, умноженный на 10). Поскольку 7 × 8 = 56, в ответе будет 7, а остаток – 4. Продолжим нашу запись: 0,87;
– разделим 40 на 8 (остаток предыдущего деления, умноженный на 10). Результат – 5, в остатке – нуль. Когда мы добираемся таким образом до нуля в остатке, наша дробь готова. Итого имеем 0,875.

Применение такого метода превращения к другим дробям иногда никак не заканчивается: можно пошагово делить и делить до бесконечности. Если попытаемся превратить $^2/_3$ в десятичную дробь, к примеру, мы обнаружим, что на каждом этапе у нас происходит деление 20 на 3, его результат равен 6, а в остатке 2, и всякий раз нам далее придется опять делить 20 на 6, и мы никогда не доберемся до нулевого остатка. В этом случае получается бесконечная десятичная дробь 0,6666666... Запись такой дроби – 0,(6), и называется она периодической.

Многие дроби ведут нас в такую бесконечность. Дробь $^5/_7$ представляет отдельный интерес: записав ее в десятичном виде, получим 0,714285714285714285... Как видим, последовательность 714285 повторяется. Если в дроби возникает повторяющаяся последовательность, мы не можем записать ее в конечном десятичном виде, и тогда запись дроби $^5/_7$ в десятичном виде будет выглядеть так: 0,(714285).



Египетские дроби

Египетские дроби Египтяне во втором тысячелетии до нашей эры основывали свою систему дробей на иероглифах, обозначающих доли *единицы,* т. е. дроби с числителем, равным 1. Это стало известно из математического папируса Ахмеса (также известного как «папирус Ринда (или Райнда)»), который ныне хранится в Британском музее. Система эта была настолько сложна, что лишь специально обученные разбирались во всех тонкостях и секретах, позволявших производить вычисления правильно.

У египтян к некоторым дробям относились особо – к $^2/_3$, например, но все остальные дроби записывали как доли единицы: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_{11}$ или $^1/_{168}$. Такова была основа их системы дробей, с помощью которой они выражали все остальные дробные числа. Например, $^5/_7$ – не доля единицы, но может быть записана в долях единицы – вот так:

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{168},$$

В таком выражении используются *разные* доли единицы. Удивительное свойство этой системы заключается в том, что одна и та же дробь может быть записана по-разному, и один вариант может оказаться короче другого:

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14},$$

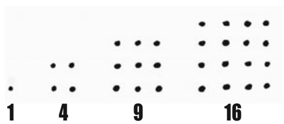
Египетские дроби получили довольно ограниченное применение, однако вдохновили целые поколения мыслителей чистой математики и поставили перед ними интересные задачи – и некоторые не решены до сих пор. Например, полный анализ методов нахождения кратчайшего выражения египетской дроби еще ждет своего отважного исследователя-математика.

В сухом остатке: Одно число над другим

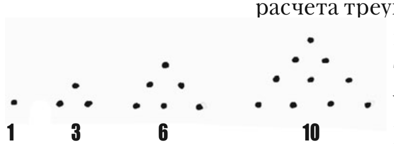
04 Квадраты и квадратные корни

Если вам нравится рисовать квадраты точками, ваш образ мышления близок к пифагорейскому. Этому развлечению предавалось братство людей, сплотившихся вокруг Пифагора — человека, памятного нам по «той самой теореме». Он родился на греческом острове Самос, а его тайное религиозное общество расцвело на юге Италии. Пифагорейцы верили, что математика есть ключ к природе Вселенной.

Посчитаем точки. Первый квадрат слева состоит всего из одной. Для пифагорейцев единица была самым важным числом, исполненным духовного смысла, а значит, мы с вами начали с главного. Продолжим подсчеты: последующие квадраты дадут нам так называемые квадратные числа — 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... Это полные квадраты. Можно вычислить следующий квадрат целого числа по точкам, добавив к предыдущему квадрату точки по контуру ⌉ — например, 9 + 7 = 16. Но на квадратах пифагорейцы не успокоились. Они рассмотрели и другие фигуры — треугольники, пятиугольники и другие многоугольники.



Треугольные числа в виде точек похожи на горки из камней. Подсчет точек в таком случае дает нам 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... Для расчета треугольного числа необходимо взять предыдущее и прибавить к нему число точек, которое будет в нижнем ряду в рассчитываемом числе. Каково будет следующее после 10 треугольное число, например? У него будет 5 точек в нижнем ряду, т. е. мы должны прибавить 5 к 10; получим 15.



СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1750 до н. э.

Вавилоняне составляют таблицы квадратных корней

525 до н. э.

Пифагорейцы изучают геометрически изображенные квадратные числа

Около 300 до н. э.

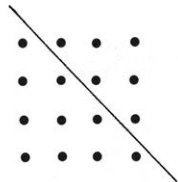
Евдоксова теория иррациональных чисел изложена Евклидом в «Началах», книга V

Если сравнить квадратные и треугольные числа, можно увидеть, что число 36 есть среди и тех и других. Есть и еще одна поразительная связь. Если *последовательно* сложить треугольные числа, знаете, что получится? Давайте попробуем — результаты справа в таблице:

Сложение попарно последовательных треугольных чисел

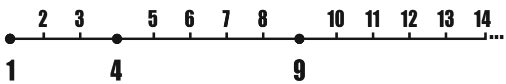
1 + 3	4
3 + 6	9
6 + 10	16
10 + 15	25
15 + 21	36
21 + 28	49
28 + 36	64

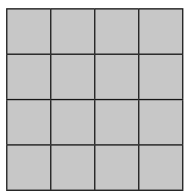
Именно! Сложение двух последовательных треугольных чисел дает квадратное. В этом можно убедиться и наглядно. Представьте себе квадрат из четырех рядов по четыре точки в каждом с проведенной через него диагональной линией. Точки выше этой линии (см. рисунок справа) образуют в сумме треугольное число, а точки ниже линии — следующее за ним треугольное число. Это наблюдение действительно для квадрата любого размера. От этих «точечных рисунков» до измерения площадей — рукой подать. Площадь квадрата со стороной 4 есть $4 \times 4 = 4^2 = 16$ точек. В целом, если сторона равна x, площадь получится x^2.



Параболическая фигура — это и спутниковая антенна, и отражатель автомобильных фар. У параболы есть фокальная (фокусная) точка. У спутниковой антенны датчик размещают в фокальной точке, и сигналы, получаемые при отражении параллельных лучей от изогнутой поверхности антенны, улавливаются этим самым датчиком. В фарах автомобиля лампочка, расположенная в фокусной точке параболы, *отправляет* вовне параллельные лучи света. Спортсмены, в свою очередь, — толкатели ядра, метатели копья или молота — знают, что именно по параболе движется любой объект, брошенный с земли и падающий на землю.

Квадратные корни Если взглянуть на задачу с другой стороны, т. е. выяснить длину стороны квадрата при заданной площади, скажем, 16, ответ будет, очевидно, 4. Квадратный корень из 16 — четыре, и записывается это так: $\sqrt{16} = 4$. Символ $\sqrt{}$ применяется для обозначения квадратных корней с XVI века. У всех квадратных чисел — симпатичные целые квадратные корни: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$ и т. д. Однако между этими полными квадратами наблюдаются широкие зазоры: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, ...





Существует гениальная альтернативная форма записи квадратных корней. Мы записываем квадратное число как x^2, и точно так же мы можем записать и квадратный корень — $x^{1/2}$, что запросто укладывается в метод

630
Брахмагупта предлагает методы расчета квадратных корней

1550
Для записи квадратных корней вводится символ $\sqrt{}$

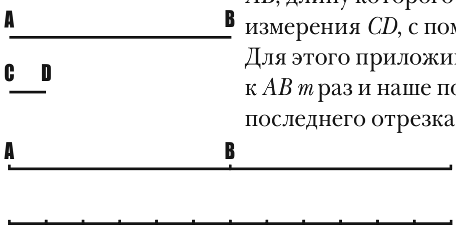
1872
Рихард Дедекинд разрабатывает теорию иррациональных чисел

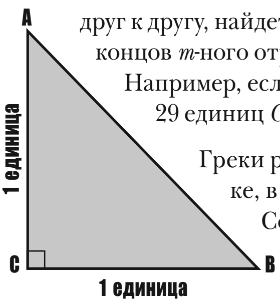
умножения чисел путем сложения их степенных показателей. Таков смысл логарифма, изобретенного около 1600 года: задача умножения может быть трансформирована в сложение. Эти числа имеют квадратные корни, но они не равны целым числам. Практически на любом калькуляторе есть кнопка «√», и с ее помощью мы можем определить $\sqrt{7}$ как 2,645751311.

Рассмотрим $\sqrt{2}$. Число 2 для пифагорейцев тоже было значимым, потому что это первое четное число (греки считали четные числа женскими, нечетные – мужскими, а все малые числа имели каждое свой характер). Если извлечь на калькуляторе квадратный корень из 2, получится 1,414213562 – если ваш калькулятор показывает столько десятичных знаков после запятой. Действительно ли это квадратный корень из двух? Проверим это, умножив 1,414213562 на 1,414213562. Получим 1,999999999. Это не вполне 2, потому что 1,414213562 – лишь округленный результат извлечения квадратного корня из двух.

Стоит отдельно отметить, что на большее нам претендовать не приходится: при извлечении квадратного корня из двух мы получим миллионы знаков после запятой, но и они по-прежнему будут лишь округлением. $\sqrt{2}$ важен для математики, хоть он и не так знаменит, как $\sqrt{\pi}$ или e (см. стр. 20–27), но достаточно значителен, а потому имеет собственное имя – его иногда называют «пифагоровым числом».

Вопрос, являются ли квадратные корни дробями, отсылает нас к теории измерения в том виде, в котором она была ведома древним грекам. Предположим, у нас есть отрезок AB, длину которого мы хотим определить, и некая незримая единица измерения CD, с помощью которой мы и станем производить измерения. Для этого приложим CD к AB. Если мы последовательно приложим CD к AB m раз и наше последнее прикладывание даст нам полное совпадение последнего отрезка AB с CD, это означает, что длина AB в точности равна m. В противном случае приставим к концу AB точно такой же отрезок длиной AB и продолжим измерение при помощи той же мерной единицы (см. рис. слева). Греки считали, что, приставив n копий AB друг к другу, найдется такое m единиц CD, при котором произойдет *точное* совпадение концов m-ного отрезка CD и n-ного AB. В таком случае длина AB окажется равна m/n. Например, если в трех отрезках AB, приставленных друг к другу, укладывается 29 единиц CD, длина AB равна $^{29}/_{3}$.





Греки размышляли о том, как измерить длину AB (гипотенузу) в треугольнике, в котором обе другие стороны равны одной «единице измерения». Согласно теореме Пифагора, длина AB может быть записана как $\sqrt{2}$, и задача в таком случае ставится так: равен ли $\sqrt{2}$ дроби m/n?

Мы уже обнаружили при помощи калькулятора, что квадратный корень из 2, записанный в десятичном виде, потенциально бесконечен, и этот факт — бесконечное количество десятичных знаков после запятой — вероятно, указывает на то, что $\sqrt{2}$ — не дробь. Однако и у десятичной дроби 0,3333333... тоже конца не видать, тем не менее она соответствует дроби $^1/_3$. Нам, судя по всему, нужны более убедительные аргументы.

Дробь ли $\sqrt{2}$? Этот вопрос подводит нас к одному из знаменитейших математических доказательств. Оно производится в излюбленном греками ключе — *апагогией*, или *доведением до абсурдного*. Сначала договоримся, что $\sqrt{2}$ не может быть и дробью, и не дробью одновременно. Таков закон логики — исключенного третьего. В логике нет срединного пути. Греки же предложили нечто совершенно гениальное. Они допустили, что $\sqrt{2}$ — дробь, и, следуя жесткой логике, шаг за шагом дошли до противоречия, т. е. «абсурда». Давайте-ка проделаем этот путь сами. Итак, допустим, что $\sqrt{2} = m/n$. Можем пойти дальше — допустим, что у m и n нет общего делителя. Это вполне допустимое предположение, потому что, будь у них общий делитель, на него можно было сократить и m, и n еще до начала наших рассуждений. (Например, дробь $^{21}/_{35}$ равна $^3/_5$, потому что у 21 и 35 есть общий делитель 7.)

Возведем обе стороны уравнения $\sqrt{2} = m/n$ в квадрат и получим $2 = m^2/n^2$, и тогда $m^2 = 2n^2$. И вот тут заметим: поскольку m^2 равно чему-то, умноженному на 2, значит, оно — четное число. Это в свою очередь означает, что и само m нечетным быть не может (потому что корень из нечетного числа — нечетное число), а значит, m — четное.

Пока наша логика безупречна. Коль скоро m — четное число, оно должно быть равно чему-то, умноженному на два, а значит, мы можем записать m как равное $2k$. Возведем обе стороны этого равенства в квадрат: $m^2 = 4k^2$. Объединим это уравнение с ранее полученным: $2n^2 = 4k^2$, сократим обе стороны уравнения на 2, и выйдет, что $n^2 = 2k^2$. Но такое мы уже видали! И в этом случае делаем аналогичный вывод: n^2 — четное число, равно как и n. Таким образом мы, следуя строгой логике, пришли к заключению, что и m, и n — четные числа, а это означает, что у них есть общий делитель — 2. Это противоречит нашей исходной установке, что у m и n нет общих делителей. Это означает, что $\sqrt{2}$ не может быть дробью.

Подобное доказательство можно провести применительно к любому $\sqrt{n}$ (за исключением тех случаев, когда n — полный квадрат) и убедиться, что квадратный корень не может быть дробью. Числа, которые нельзя выразить в виде дроби, называются «иррациональными», и таких чисел — бесконечность.

В сухом остатке: Добираемся до иррациональных чисел

05 π

π — самое знаменитое число в математике. Забудь вы все остальные мировые константы, вспомнится первым. Если бы числам присуждали «Оскар», π получало бы его ежегодно.

π, или число «пи», есть длина окружности, деленная на длину отрезка, проведенного через центр этой окружности (диаметр). Значение этого числа, соотношение этих двух длин, не зависит от размеров окружности. Большая она или маленькая, π — самая что ни на есть математическая постоянная. Окружность — естественная среда обитания π, однако эта константа возникает в математике повсюду и даже там, где окружностей нет и в помине.

Архимед Сиракузский Отношение длины окружности и ее диаметра — объект давнего интереса. Примерно во втором тысячелетии до н. э. вавилоняне заметили, что длина любой окружности примерно в три раза больше ее диаметра.

Для окружности с диаметром *d* и радиусом *r*:

длина окружности = $\pi d = 2\pi r$

площадь = πr^2

Для сферы с диаметром *d* и радиусом *r*:

площадь поверхности = $= \pi d^2 = 4\pi r^2$

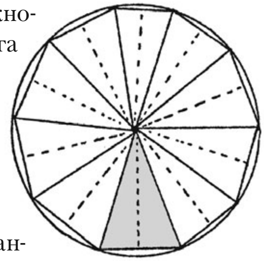
объем = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Но именно Архимед Сиракузский около 225 до н. э. положил начало великой математической теории π. Архимед, конечно, голова. Математики обожают ранжировать своих коллег, и Архимеда они ставят в один ряд с Карлом Фридрихом Гауссом, «королем математики», и сэром Исааком Ньютоном. Как бы мы ни относились к этому утверждению, Архимед, очевидно, занял бы свое место в любом Зале Славы математики, хоть он и не был святее Папы Римского — наряду со вкладом в астрономию, математику и физику, он прославился разработкой оружия: катапульт, рычагов и так называемых «жгучих зеркал» — все для того, чтобы римляне вели себя прилично. Но, как ни крути, было в нем что-то от чокнутого профессора, иначе с чего бы ему выскакивать из ванны и нестись голым по улицам с воплями «Эврика!» после открытия им знаменитого закона гидростатики? Описание способа, каким он отпраздновал свои достижения в исследованиях числа π, история не сохранила.

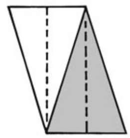
СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

2000 до н. э.
По наблюдениям вавилонян, π примерно равно 3

250 до н. э.
Архимед аппроксимирует π как 22/7



Если исходить из того, что π определяется как отношение длины окружности к ее диаметру, как увязать с этим *площадь круга*? То, что площадь круга радиусом r есть πr^2 – *вывод* из определения числа π, хоть оно и более известно, чем само определение через отношение длины окружности к диаметру. Несение двойной службы π – его знак особого отличия.



Как это доказать? Круг можно разбить на множество узких одинаковых треугольников с длиной основания b и высотой, которая примерно равна радиусу r. В результате получим многоугольник, вписанный в круг, и они будут очень близки друг другу по площади. Возьмем для начала 1000 таких треугольников. Все наше рассуждение – упражнение в приближении. Сложим попарно соседние треугольники – из них получатся прямоугольники с приблизительной площадью, равной $b \times r$, и тогда общая площадь многоугольника будет равна $500 \times b \times r$. Поскольку $500 \times b$ – это примерно половина длины окружности, которая равна πr, значит, площадь многоугольника получится равной $\pi r \times r = \pi r^2$. Чем на большее число треугольников мы разобьем нашу окружность, тем точнее окажется наше приближение и в пределе мы действительно установим, что площадь круга равна πr^2.

Архимед оценил значение π между $^{223}/_{71}$ и $^{220}/_{70}$. Именно благодаря Архимеду мы привыкли к приблизительному выражению числа π как $^{22}/_{7}$. Честь точного определения числа π принадлежит малоизвестному валлийскому математику Уильяму Джонсу, в XVIII веке ставшему вице-президентом Лондонского королевского научного общества. А популяризатором π в контексте соотношений размерностей окружности стал математик и физик Леонард Эйлер.

Точное значение π Мы никогда не сможем узнать *точное* значение числа π, потому что оно – иррациональное число: этот факт в 1768 году доказал Иоганн Ламберт. Десятичное выражение этого числа бесконечно, и в нем не просматривается никаких предсказуемых закономерностей. Первые 20 знаков после запятой таковы: 3,14159265358979323846... Значение $\sqrt{10}$, применявшееся китайскими математиками для аппроксимации числа π, равно 3,1**6**227766016837933199, и это значение было принято около 500 г. н. э. Брахмагуптой; оно в самом деле не намного лучше, чем огрубленное 3, и расхождение со значением π начинается уже со второго знака после запятой.

Можно рассчитать π при помощи *ряда* чисел. Вот один из них, хорошо известный:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

1706

Уильям Джонс вводит символ π

1786

Иоганн Генрих Ламберт доказывает, что число π — иррациональное

1882

Фердинанд фон Линдеманн доказывает, что число π — трансцендентное хотя он приближается к значению π мучительно медленно и довольно безнадежно для расчетов. Эйлер открыл другой замечательный ряд π:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

Гений-самоучка Сриниваса Рамануджан Айенгор придумал блестящую формулу аппроксимации — в нее входит только квадратный корень из 2:

$$\frac{9801}{4412}\sqrt{2} = 3{,}1415927300133056603139961\mathbf{90}\ldots$$

Математиков завораживает число π. Ламберт доказал, что π не может быть дробью, а немецкий математик Фердинанд фон Линдеманн в 1882 году решил наитруднейшую задачу, связанную с π. Он продемонстрировал, что π — трансцендентно, т. е. не может быть решением алгебраического уравнения (корнем многочлена с целыми коэффициентами). Решив эту «загадку веков», Линдеманн закрыл вопрос «квадратуры круга». Задача состояла в том, чтобы в предложенном круге выстроить квадрат той же площади с помощью только циркуля и линейки. Линдеманн неоспоримо доказал, что это проделать невозможно. Ныне «решение задачи квадратуры круга» — эвфемизм, обозначающий невыполнимое, безнадежное дело.

Далее расчеты числа π пошли бодрее. В 1853 году Уильям Шэнкс объявил о вычислении π вплоть до 607 знака (на самом деле из них точны оказались лишь первые 527). В наши дни гонка за знаками после запятой в числе π набрала еще большую скорость — спасибо компьютерным технологиям. В 1949 году были рассчитаны 2037 знаков после запятой, на что компьютеру ЭНИАК* потребовалось 70 часов. К 2002 году мы знали ошеломительные 1 241 100 000 000 знаков после запятой, но хвост этот продолжает расти. Если встать на экваторе и начать писать знаки π, то Шэнксовы цифры впишутся в 14 метров, а длина этого числа, известная нам к 2002 году, — 62 витка вокруг Земли по экватору!

О π было задано много вопросов. Случайны ли цифры в числе π? Существует ли какая-нибудь предсказуемая последовательность в записи π? Есть ли в написании последовательность 0123456789? В 1950 году эти вопросы казались непостижимыми. Никто не смог отыскать никаких закономерностей в тех 2000 знаков, которые были на тот момент вычислены. Известный голландский математик Л. Э. Я. Брауэр говорил, что эти вопросы лишены смысла, — он был убежден, что любой ответ в данном случае проверке не поддается. Но в 1997 году эта последовательность была обнаружена на 17 387 594 880 месте после запятой, а в терминах витков вокруг Земли — за 3000 миль до завершения полного оборота вдоль экватора. В 600 милях до конца того же витка можно обнаружить последовательность из десяти шестерок, а до десяти семерок придется подождать — до конца витка и еще 3600 миль.

* *ENIAC*, сокр. от англ. *Electronic Numerical Integrator and Computer* — электронный числовой интегратор и вычислитель.

«Пи» в поэзии

Если хочется запомнить первые знаки в числе π, вероятно, вам поможет поэзия. Следуя традиции обучения математике через мнемонику*, Майкл Кит сочинил блистательную вариацию на тему стихотворения «Ворон» Э. А. По.

«Ворон», первые строки:

Once upon a midnight dreary,
while I pondered weak and weary,
Over many a quaint and curious
volume of forgotten lore…

«Мнемоническая» вариация М. Кита начинается так:

Poe, E. Near A Raven
Midnights so dreary, tired and weary.
Silently pondering volumes extolling
all by-now obsolete lore…

Количество букв в каждом слове в версии Кита соответствует знаку в записи числа π и позволяет запомнить первые 740 знаков числа π.

Значимость π Что толку знать число π с такой точностью? В конце концов, большинство наших вычислений требует всего несколько десятичных знаков после запятой; практический смысл имеет, допустим, десяток знаков, а для этого хватит и архимедова приближения $^{22}/_{7}$. Но крупномасштабные вычисления выполняются не исключительно развлечения ради. Они служат для проверки быстродействия компьютеров, а не только для завораживания некоторых математиков, которые зовут себя «друзьями пи».

Быть может, страннейшим случаем в жизни π оказалась попытка законодательного собрания штата Индиана протолкнуть закон о фиксации значения числа π. В конце XIX века врач Э. Дж. Гудвин предложил законодательно сделать число π «удобоваримым». Практическая загвоздка с этим законопроектом состояла в том, что его инициатор не смог зафиксировать число π в желанном ему значении. К счастью для Индианы, идиотизм предложения применить закон к числу π стал очевиден до принятия официального решения.

* Существует несколько русскоязычных мнемонических правил, помогающих запомнить несколько знаков в формуле числа π, однако широкую известность получили лишь короткие, в пределах пары десятков слов (и, соотв., знаков в записи), например: «Как я хочу и желаю надраться до чертей после сих тупых вопросов, наводящих тяжелую депрессию!»

В сухом остатке: Когда открыли π

06 e

_e_ по сравнению с π — константа-«новичок». π — особа августейшая, с великим прошлым, чьи корни уходят в историю Вавилона, а _e_ ракушками былого еще обрасти не успела. Постоянная _e_ юна, бодра и непременно присутствует всюду, где есть _рост_: населения, денег или других физических величин.

e — число, округленно равное 2,71828. В чем же его особенность? Это не случайно выбранное число, а одна из величайших математических постоянных. Оно получило известность в начале XVII века: несколько математиков приложили немало сил, чтобы разобраться с концепцией логарифма — замечательного изобретения, позволившего превратить умножение больших чисел в их сложение.

Но все началось в XVII веке с *e*-коммерции — с Якоба Бернулли, одного из прославленных швейцарских Бернулли — семьи, которая занималась поставками математиков всему миру. Якоб взялся за работу в 1683 году и начал с задачи о капитализации процентов.

Деньги, деньги, деньги Вообразите годичный интервал времени, запредельную ставку кредитования в 100% и стартовый депозит («основной капитал») в 1 фунт. Разумеется, редко выпадает удача получать 100% дохода с вложений, но такая постановка задачи нам попросту удобна, а все дальнейшие выкладки приложимы и к правдоподобным ставкам в 6–7%. Аналогично можно умножить все наши данные на 10 000, если основной капитал — 10 000 фунтов, например.

При 100%-ном доходе в конце года у нас на руках будут и сумма основного капитала, и доход — в наших условиях обе суммы равны 1 фунту. Таким образом получаем итого 2 фунта. Теперь предположим, что кредитная ставка стала вдвое меньше, т. е. 50%, но рассчитывается каждые полгода отдельно. В первые полгода мы заработаем 50 пенсов, к концу первого полугодия общий капитал при этом составит 1,5 фунта.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1618

Джон Непер (Нейпир) сталкивается с постоянной *e* — в связи с логарифмическими вычислениями

1727

Леонард Эйлер применяет написание *e* в теории логарифмов; его иногда называют числом Эйлера

Тогда к концу года у нас на руках окажется эта сумма плюс еще 75 пенсов дохода. Итого наше стартовое вложение в 1 фунт выросло к концу года до 2,25 фунта! Капитализируя проценты каждые полгода, мы заработали дополнительно 25 пенсов. Вроде не так много, но если бы наши вложения составляли 10 000 фунтов, мы заработали бы 2250 фунтов, а не 2000. Капитализация процентов каждые полгода позволяет нам заработать нелишние 250 фунтов.

Однако, если мы, капитализируя проценты каждые полгода, зарабатываем на наших вложениях, банк на деньгах, которые мы ему должны, тоже заработает, поэтому стоит держать ухо востро. Предположим, год делится на четыре квартала, и в каждом квартале ставка – 25%. Произведем расчеты, аналогичные предыдущим, и увидим, что наш 1 фунт вырос до 2,44141 фунта. Денег у нас явно прибавилось, и, если вложить 10 000 фунтов и капитализировать меньшие проценты, но чаще, выйдет вроде бы приличная выгода.

Капитализируем каждый...	Общая сумма, фунтов
год	2,00000
полгода	2,25000
квартал	2,44141
месяц	2,61304
неделю	2,69260
день	2,71457
час	2,71813
минуту	2,71828
секунду	2,71828

Будет ли наш капитал расти бесконечно и сделает ли он нас миллионерами? Если продолжим дробить год на все меньшие периоды (см. таблицу справа), мы увидим, что «в пределе» суммарное количество заработанных денег устремляется к постоянной величине. Очевидно, предел разумной капитализации – один день (так банки и поступают). Математическая сторона этой практической задачки – число *e*: именно к нему устремляется доходность 1 фунта при непрерывной капитализации. Хорошо это или плохо? Ответ вам известен: если вы вкладываете деньги – да, если должны деньги – нет. Такая вот *e*-наука.

Точное значение *e* Как и число π, постоянная *e* – иррациональное число, и поэтому так же, как и в случае с π, мы не можем вычислить точное его значение. До двадцатого знака после запятой $e = 2{,}71828182845904523536...$

В дробном выражении наилучшее приближение к значению *e* дает $^{87}/_{32}$ – если ограничить числитель и знаменатель двухзначными числами. Любопытно отметить, что в трехзначных числах наиболее точно постоянную *e* определяет дробь $^{878}/_{323}$. Вторая дробь – своего рода палиндромное расширение первой, математика любит эти милые сюрпризы. Хорошо известный ряд, описывающий значение числа *e* таков:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} + \ldots$$

1748

Эйлер рассчитывает первые 23 знака числа *e*; ему приписывают открытие знаменитой формулы $e^{i\pi} + 1 = 0$

1873

Шарль Эрмит доказывает трансцендентность *e*

2007

Рассчитано 10^{11} знаков *e*

Запись в виде факториалов тут нам придется очень кстати. Обозначение факториала – восклицательный знак, т. е. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. В такой записи ряд приобретет вид:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

В значении числа e явно просматриваются кое-какие закономерности, и в этом отношении оно «симметричнее» числа π.

Желаете знать способ запоминания первых нескольких знаков в постоянной e после запятой? Извольте первые 12 десятичных знаков: «Давай-ка я попробую не позабыть и наизусть не твердить этот хвост длиннющий», количество букв в каждом слове соответствует цифре в значении числа e. Если вам знакома американская история, можете запоминать e как «2,7 Эндрю Джексон Эндрю Джексон»: Эндрю Джексон – седьмой президент США, избранный в 1828 году. Способов запоминать число e немало, но интересна в них только затейливость, а не дополнительный математический смысл.

Иррациональность e (e – не дробь) была доказана Леонардом Эйлером в 1737 году. В 1840-м французский математик Жозеф Лиувилль показал также, что e не может быть решением никакого квадратного уравнения, а в 1873 году в своем новаторском труде, посвященном e, соотечественник Лиувилля Шарль Эрмит доказал трансцендентность числа e (оно не может быть решением никакого *алгебраического* уравнения). Важнейшим в этой работе оказался способ, которым воспользовался Эрмит. Девять лет спустя Фердинанд фон Линдеманн применил его для доказательства трансцендентности π – задачи куда более существенной.

Один вопрос получил ответ, зато появилось несколько новых. Если возвести число e в степень e, будет ли полученный результат также трансцендентным числом? Вроде бы иначе и быть не может – само выражение выглядит чересчур странно. Тем не менее пока строгого доказательства не произведено, а значит, согласно суровым стандартам математики, это предположение остается гипотезой. Математики потихоньку двигаются к доказательству – уже установлено, что e и e, возведенное в степень π, не могут быть трансцендентными оба одновременно. Уже теплее, но еще не горячо.

Связь между π и e поражает воображение. Значения e^{π} и π^{e} близки, но легко доказать (даже не прибегая к вычислениям их реальных значений), что $e^{\pi} > \pi^{e}$. Если вы сжульничали и посчитали на калькуляторе, сами видите, что $e^{\pi} = 23{,}14069$, а $\pi^{e} = 22{,}45916$.

Число e^{π} известно под названием «постоянная Гельфонда» (в честь русского математика Александра Гельфонда); его трансцендентность доказана. Гораздо меньше нам известно о π^{e}; доказательства его иррациональности пока нет, если оно вообще иррационально.

Важно ли e? Место обитания e — разнообразный рост чего угодно. Примеры — экономический рост и рост населения. Кривые, описывающие процесс радиоактивного распада, также связаны с этой константой.

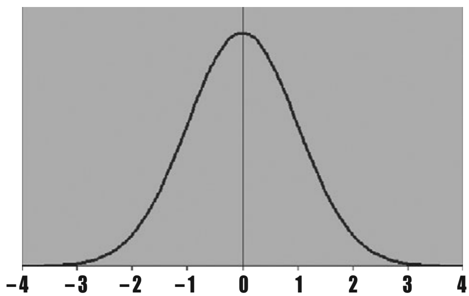
Число e возникает и в связи с другими задачами. В XVIII веке Пьер де Монмор исследовал задачу о вероятностях, и с тех пор ей уделили еще больше внимания. В простой версии этой задачи компания людей отправляется обедать, после чего разбирает свои шляпы не глядя. Какова вероятность того, что ни один человек не окажется в своей шляпе?

Можно доказать, что эта вероятность равна $^1/_e$ (т. е. примерно 37%), а вероятность того, что хотя бы один человек нахлобучит собственную шляпу, составляет $1 - {}^1/_e$ (63%). Это один из многих способов применения теории вероятности. Пуассоновское распределение, описывающее редкие события, — еще один. Таковы первые примеры, но они далеко не единственные: Джеймс Стирлинг обнаружил замечательную аппроксимацию факториального значения $n!$ с применением e (и π); в статистике знаменитая «колоколообразная» кривая (кривая нормального распределения) тоже не обходится без e; в инженерном деле кривая тросов подвесного моста описывается с участием e. Словом, список бесконечен.

Потрясающая сущность Звание самой поразительной формулы математики принадлежит выражению, включающему в себя e. Если вспоминать великие числа математики, на ум приходят 0, 1, π, e и мнимое число $i = \sqrt{-1}$. Оказывается, что

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Представляете? Этот математический вывод принадлежит Эйлеру.



Нормальное распределение

Быть может, подлинная значимость e — в загадке, занимавшей умы целых поколений математиков. От этой константы никуда не деться. Вероятно, поэтому писатель Э. В. Райт — возможно, это псевдоним — потрудился написать роман «Гэдзби» без единой e. Невозможно, однако, представить себе математика, который бы собрался написать учебник без единой e — и оказался бы способен это сделать.

В сухом остатке: Самое натуральное число

07 Бесконечность

Насколько велика бесконечность? Короткий ответ таков: ∞ (так символически она записывается) — это очень много. Вообразите прямую, на которой размещаются все возрастающие числа, и линия эта «уходит в бесконечность». Каким бы громадным число ни было — допустим, 10^{1000}, всегда найдется еще большее — $10^{1000} + 1$.

Таково традиционное представление о бесконечности – числа, вечно бегущие вдаль. Математика имеет в виду бесконечность всевозможными способами, но обращаться с нею надо внимательно: бесконечность не является обыкновенным числом.

Посчитаем Немецкий математик Георг Кантор подарил нам принципиально иной взгляд на бесконечность, попутно единолично создав теорию, легшую в основу многих областей современной математики. Ключевая мысль, на которой базируется теория Кантора, относится к простейшему представлению о счете – даже проще, чем тот, что мы применяем в быту.

Вообразите селянина, который не умеет считать числами. Как ему узнать, сколько у него овец? Просто: выпуская утром овец из загона, хозяин может удостовериться, все ли вернулись вечером, откладывая из каменной груды, лежащей у выгона, столько же камней, сколько овец было выпущено пастись, а вечером возвращая камни на место. Если сколько-то овец потерялось, столько же камней останется не переложенными. Селянин, не владея счетом, поступает очень математично: применяет взаимно-однозначное соответствие количеств овец и камней. У этого примитивного приема есть несколько удивительных следствий.

Теория Кантора имеет дело с *множествами* (множество – просто набор объектов). Например, запись **N** ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...} обозначает

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

350

Аристотель отвергает понятие актуальной бесконечности

1639

Жерар Дезарг вводит понятие бесконечности в геометрию множество положительных целых (натуральных) чисел. Итак, у нас есть множество, а в нем могут быть подмножества – меньшие множества, включенные в большее. Самыми очевидными подмножествами внутри нашего **N** являются O = {1, 3, 5, 7, ...} и **E** = {2, 4, 6, 8, ...} – множества нечетных и четных чисел соответственно.

Задай мы вопрос, одинаково ли количество четных и нечетных чисел, каков был бы ответ? Хоть мы и не в силах посчитать элементы в каждом из этих множеств и сравнить результаты, ответ тем не менее, разумеется, «да». На чем основана эта убежденность? Возможно, на утверждении вроде: «половина всех чисел – нечетная, а половина – четная». Кантор согласился бы с таким ответом, но по другой причине. Он бы сказал, что у каждого нечетного числа есть по соседству четная «пара». Утверждение, что в обоих множествах **O** и **E** должно быть одинаковое количество элементов, основано на парности каждого нечетного числа с четным:

O:	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21 ...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
E:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22 ...

На следующий вопрос – «столько ли у нас целых чисел, сколько и четных?» – ответ будет «нет», потому что множество **N** вдвое больше отдельно взятого множества четных чисел.

Однако это самое «больше» в данном случае выходит довольно смутное, поскольку мы имеем дело с множествами, включающими в себя неопределенное число элементов. Проще все-таки возиться с взаимно-однозначным соответствием. Приложим его к множествам **N** и **E**:

N:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
E:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22 ...

И тут мы приходим к ошеломительному выводу: целых чисел «столько же», сколько четных! А это вступает в противоречие с «расхожей истиной», провозглашенной еще древними греками: «Начала» Евклида Александрийского с порога сообщают нам, что «целое больше части».

1655

Джону Валлису приписывают первое употребление символа «любовный узел», т. е. ∞, для обозначения бесконечности

1874

Георг Кантор подходит к рассмотрению бесконечности строго, вводит различение разных порядков бесконечности

1960-е

Абрахам Робинсон изобретает «нестандартный анализ», основанный на понятии бесконечно малых чисел

Мощность множества Количество элементов в множестве называется его «мощностью». В случае с овцами мощность, зафиксированная счетоводами нашего селянина, составляет 42. Мощность множества {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*} равна 5, записывается это так: *card*{*a*, *b*, *c*, *d*, *e*} = 5, от латинского *cardinalis* – главное обстоятельство, сердцевина. Таким образом, мощность множества – мера его «масштабов».

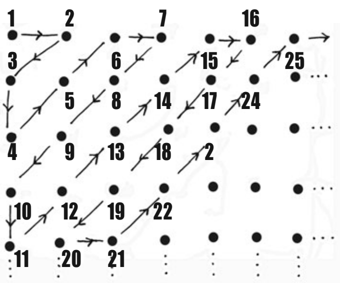
Для обозначения мощности множества целых чисел **N** и любых множеств, взаимно-однозначно соответствующих **N**, Кантор предложил символ $\aleph_0$ (א, или «алеф», – буква ивритского алфавита, $\aleph_0$ читается как «алеф-нуль»). Итак, на языке математики можем записать следующее: {**N**} = {**O**} = {**E**} = $\aleph_0$.

Любое множество, которое можно поставить во взаимно-однозначное соответствие множеству **N**, называется «бесконечным счетным». «Бесконечное счетное» означает, что мы можем составить список элементов этого множества. Например, список нечетных чисел – 1, 3, 5, 7, 9, ..., и мы знаем, какой элемент первый, какой второй и т. д.

Дроби – бесконечно счетны? Множество чисел, которые можно представить в виде дробей, **Q** больше множества **N**, поскольку множество **N** можно представить как подмножество **Q**. Можем ли мы записать элементы **Q** списком? Можем ли мы отразить на письме все до единой дроби (включая отрицательные)? Мысль о том, что подобное громадное множество можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с **N**, видится невозможной. Однако она воплощаема.

1	−1	2	−2	3	−3	4	…
$1/2$	$-1/2$	$3/2$	$-3/2$	$5/2$	$-5/2$	$7/2$	…
$1/3$	$-1/3$	$2/3$	$-2/3$	$4/3$	$-4/3$	$5/3$	…
$1/4$	$-1/4$	$3/4$	$-3/4$	$5/4$	$-5/4$	$7/4$	…
$1/5$	$-1/5$	$2/5$	$-2/5$	$3/5$	$-3/5$	$4/5$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

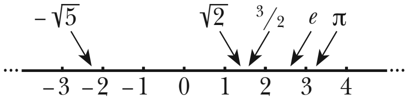
Начнем с того, что перейдем в термины двухмерности. Запишем ряд целых чисел, отрицательных и положительных, поочередно. Под ним запишем дроби с 2 в знаменателе, но оставим в стороне те, что есть в верхнем ряду (например, $^6/_2 = 3$). Ниже запишем дроби с 3 в знаменателе, опять-таки отбрасывая те, что у нас уже записаны. Продолжая в этом духе бесконечно, мы тем не менее будем точно знать, где в нашей таблице появляется та или иная дробь. Например, $^{209}/_{67}$ в 67-м ряду примерно на 200 мест правее $^1/_{67}$.



Разместив таким образом все дроби – хотя бы теоретически, – мы сможем собрать и одномерный список. Если двинуться вдоль верхнего ряда вправо, до второго ряда нам не добраться никогда. Однако, если выбрать извилистый маршрут, все может и получиться. Начнем с 1 и получим вот такой линейный ряд: 1, – 1, $^1/_2$, $^1/_3$, – $^1/_2$, 2, – 2 – далее по стрелочкам, см. схему слева.

Каждая дробь, положительная или отрицательная, окажется на некоем месте в этом линейном списке и, соответственно, положение каждой обусловливает позицию «пары» в двухмерном списке дробей. Таким образом мы можем заключить, что множество дробей **Q** — бесконечное счетное, и записать $\{\mathbf{Q}\} = \aleph_0$.

Перепись действительных чисел Тогда как множество дробей включает в себя обилие разнообразных элементов из действительных чисел, есть еще и действительные числа вроде $\sqrt{2}$, *e* и π, которые дробями не являются. Это иррациональные числа — они «заполняют пустоты» в ряду действительных чисел **R**.



Все пустоты в множестве **R** заполнены, и это множество называется «полным», или «непрерывным». Как же нам составить список действительных чисел? В порыве подлинной гениальности Кантор доказал, что даже попытка записать все действительные числа в диапазоне *между* 0 и 1 обречена. Воистину сокрушительный факт для любителей списков: как это так — невозможно составить список каких-то там чисел?

Предположим, вы не поверили Кантору. Вы знаете, что любое число от 0 до 1 можно записать в виде десятичной дроби любой протяженности, например: $^1/_2$ = 0,50000000000000000..., а $^1/_\pi$ = 0,31830988618379067153..., и вы бы сказали Кантору, дескать, вот список *всех* чисел от 0 до 1, который мы обозначим r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, ... Если вам такой список составить не удастся, значит, Кантор прав.

Представьте, что Кантор смотрит на ваш список и выделяет полужирным числа по диагонали:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r_1}&: 0,\boldsymbol{a_1}a_2a_3a_4a_5\ldots \\ \boldsymbol{r_2}&: 0,b_1\boldsymbol{b_2}b_3b_4b_5\ldots \\ \boldsymbol{r_3}&: 0,c_1c_2\boldsymbol{c_3}c_4c_5\ldots \\ \boldsymbol{r_4}&: 0,d_1d_2d_3\boldsymbol{d_4}d_5\ldots \end{aligned}$$

Кантор сказал бы так: «Ну хорошо, а где же число $x = x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$, где x_1 отличается от a_1, x_2 отличается от b_2, x_3 — от c_3 и т. д. по диагонали?» Его x отличается от любого числа в вашем списке в одном из знаков после запятой, следовательно, этого числа в вашем списке нет. Кантор прав.

Иными словами, невозможно составить список множества действительных чисел **R**, а значит, это большее бесконечное множество — оно «более высокого порядка бесконечности», нежели бесконечность множества дробей **Q**. Громадное стало еще больше.

В сухом остатке: Каскад бесконечностей

08 Мнимые числа

Мы, конечно же, можем возомнить себе числа. Иногда мне мнится, что на моем банковском счете — миллион фунтов, и нет никаких сомнений, что это «мнимое число». Однако в математике мнимость не имеет с подобными фантазиями ничего общего.

Предложение термина «мнимый» приписывают философу и математику Рене Декарту — в знак признания занимательных решений, предложенных им для уравнений с участием далеко не обычных чисел. Так они существуют, эти мнимые числа, или нет? Об этот вопрос ломали зубы многие философы — особенно их смущало определение «мнимое». Для математиков существование мнимых чисел проблемы не представляло. Они — такая же часть повседневности, как 5 или π. Мнимые числа, может, и незачем нам при походе в магазин, но спросите-ка любого авиаконструктора или инженера-электрика — и поймете, что им без мнимых чисел совсем никак. А сложением действительного и мнимого чисел мы получаем так называемое «комплексное число», и с этим обозначением у нас с ходу гораздо меньше философских затруднений. Теория комплексных чисел группируется вокруг квадратного корня из *минус* 1. А какое число в квадрате даст нам – 1?

Если взять любое число, отличное от нуля, и умножить на само себя (возвести в квадрат), всегда получится положительное число. В это легко поверить применительно к положительным числам, но верно ли это в случае с числами отрицательными? Попробуем проверить на примере – 1 × (– 1). Если даже позабыть про выученное в школе правило, что «минус, помноженный на минус, дает плюс», мы во всяком случае помним, что ответ либо – 1, либо + 1. Если бы – 1 × – 1 = – 1, обе стороны этого равенства можно разделить на – 1 и получить в результате – 1 = 1, а это нонсенс. Из этого следует, что – 1 × – 1 = 1, т. е. положительное число. То же доказательство действительно по отношению к любым отрицательным числам помимо – 1, а это значит, что при

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1572

Рафаэль Бомбелли производит расчеты с мнимыми числами

1777

Эйлер впервые использует символ *i* для обозначения квадратного корня из – 1 возведении в квадрат любого действительного числа результат *никогда* не отрицательный.

В начале XVI века, на заре открытия комплексных чисел, такой вывод не давал математикам сдвинуться с мертвой точки. Когда эту трудность удалось преодолеть, полученный ответ освободил ученых от оков обычных чисел и открыл новые горизонты исследований, о которых раньше и не мечталось. Развитие теории комплексных чисел – приведение действительных чисел к естественной и более совершенной системе.

$\sqrt{-1}$ в инженерном деле

Комплексные числа пригодились даже инженерам, людям сугубо практическим. Когда Майкл Фарадей в 1830-х открыл переменный ток, мнимые числа обрели физическое воплощение. Для этих целей $\sqrt{-1}$ переименовывается в *j*, потому что в физической терминологии *i* — обозначение электрического тока.

Квадратный корень из – 1 Мы уже удостоверились, что в пределах действительных чисел

$$\cdots \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots$$

не может быть квадратного корня из – 1, поскольку нет такого числа, квадрат которого был бы отрицательным. Если продолжить думать о числах только в пределах действительного ряда, проще плюнуть, считать все остальные числа мнимыми, пойти пить чай с философами и вообще не иметь с этим дел. А можно сделать дерзкий шаг – принять $\sqrt{-1}$ как новую сущность. Она обозначается буквой i.

Силою мысли мнимые числа все-таки существуют. Чем они являются, мы не знаем, но верим в их существование. Мы по крайней мере знаем, что $i^2 = -1$. Таким образом, в нашей новой системе чисел есть и старые друзья – действительные числа 1, 2, 3, 4, e, π, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, а также новые, с i, например: $1 + 2i$, $-3 + i$, $2 + 3i$, $1 + i\sqrt{2}$, $\sqrt{3} + 2i$, $e + i$ и т. д.

Этот судьбоносный шаг был предпринят в математике в начале XIX века – тогда-то мы и оставили одномерную линию чисел и выбрались на странную двухмерную их плоскость.

Сложение и умножение Итак, вот они, комплексные числа, пред нашим мысленным взором, в виде $a + bi$, но как нам с ними обращаться? Как и действительные числа, их можно складывать и умножать. Сложение мы осуществляем, складывая соответствующие их части, т. е. $2 + 3i$, сложенное с $8 + 4i$, дает нам $(2 + 8) + (3 + 4)i$, т. е. $10 + 7i$.

1806

Жан-Робер Арган предлагает геометрическое представление комплексных чисел, впоследствии получившее название «диаграммы Аргана»

1811

Карл Фридрих Гаусс работает с функциями комплексных переменных

1837

Уильям Р. Гамильтон (Хэмилтон) обращается с комплексными числами как с упорядоченными парами действительных чисел

Умножение практически столь же незатейливо. Если нужно умножить $2 + 3i$ на $8 + 4i$, умножим их попарно:

$$(2 + 3i) \times (8 + 4i) = (2 \times 8) + (2 \times 4i) + (3i \times 8) + (3i \times 4i),$$

после чего суммируем результаты умножений в скобках: $16 + 8i + 24i + 12i^2$ (в последнем слагаемом заменим i^2 на -1). Получим $(16 - 12) + (8i + 24i)$, т. е. комплексное число $4 + 32i$.

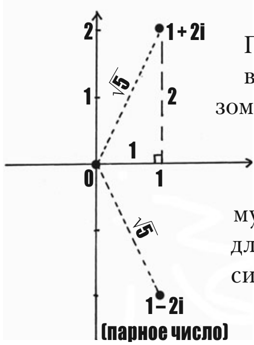
К комплексным числам применимы все обычные правила арифметики. Вычитание и деление всегда возможны (кроме комплексного числа $0 + 0i$, но с нулем некоторые номера не проходят и среди действительных чисел). По сути, комплексные числа обладают всеми свойствами действительных, за исключением одного: у комплексных чисел мы не можем различить положительные и отрицательные.

Диаграмма Аргана Двухмерность комплексных чисел становится очевидной, если представить их в виде диаграммы. Комплексные числа $-3 + i$ и $1 + 2i$ можно изобразить в виде так называемой диаграммы Аргана (комплексной плоскости), названной в честь швейцарского математика Жана Робера Аргана, хотя и у других ученых того времени возникали похожие соображения.

Любое комплексное число имеет пару, официально именуемую «сопряженным числом». Такая пара для $1 + 2i$ есть $1 - 2i$, т. е. они отличаются друг от друга знаком перед вторым компонентом. Парой для $1 - 2i$ является $1 + 2i$, т. е. это подлинная парность.

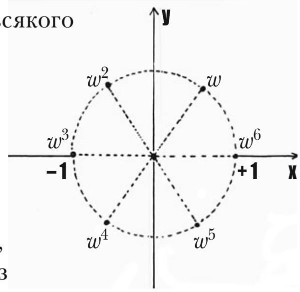
Сложение и умножение таких парных чисел всегда производит действительное число. В случае сложения $1 + 2i$ и $1 - 2i$ получаем 2, умножая, получаем 5. Умножение — интереснее. Ответ 5 — это квадрат «длины» комплексного числа $1 + 2i$, а это в свою очередь — «длина» пары этого числа. Эта «длина» комплексного числа называется его модулем. Модуль комплексного числа можно определить вот так:

$$\textit{модуль } w = \sqrt{(w \times \textit{парное число к } w)}.$$



Проверим, действительно ли это утверждение для $-3 + i$: получим выражение *модуль* $(-3 + i) = \sqrt{(-3 + i) \times (-3 - i)} = \sqrt{(9 + 1)}$, таким образом, *модуль* $-3 + i = \sqrt{10}$.

Освобождение комплексных чисел от налета мистики случилось благодаря сэру Уильяму Роуэну Гамильтону, величайшему ирландскому математику XIX века. Он признал, что i как таковая для математической теории без надобности — она является лишь символом-заполнителем, и ее можно запросто отбросить. Гамильтон рассмотрел комплексное число как «упорядоченную пару»



действительных чисел (a, b) и двухмерное качество этой пары, без всякого участия таинственного $\sqrt{-1}$. Избавившись от i, получим такой вид сложения:

$$(2, 3) + (8, 4) = (10, 7)$$

и умножения, хоть оно и чуть менее очевидно:

$$(2, 3) \times (8, 4) = (4, 32).$$

Завершенность системы комплексных чисел становится очевиднее, если поразмыслить над так называемыми корнями n-ной степени из единицы. Рассмотрим, к примеру, решения уравнения $z^n = 1$, а конкретнее, допустим, $z^6 = 1$. Решений среди действительных чисел у такого уравнения два: $z = 1$ и $z = -1$ (потому что $1^6 = 1$ и $(-1)^6 = 1$), но где же остальные? Таких корней (и это можно строго доказать) должно быть шесть*. Как и два действительных корня этого уравнения, все шесть корней имеют единичную длину и размещаются по окружности с центром в точке начала координат и радиусом, равным единице.

* Доказательство проистекает из основной теоремы алгебры о том, что всякий отличный от константы многочлен (от одной переменной) с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень в поле комплексных чисел.

Более того, если всмотреться в равенство $w = {}^1/_2 + i\,{}^{\sqrt{3}}/_2$, что является одним из корней уравнения в первой четверти круга (в первом квадранте), остальные корни, если двигаться против часовой стрелки, — w^2, w^3, w^4, w^5, $w^6 = 1$ — находятся в вершинах равностороннего шестиугольника. Вообще, n корней из единицы будут все расположены на окружности, в «вершинах» правильного n-угольника.

Распространение комплексных чисел Стоило математикам обрести комплексные числа, как они принялись инстинктивно искать обобщения. Комплексные числа двухмерны, но можно ведь на двух измерениях не останавливаться? Много лет Гамильтон пытался выстроить трехмерные числа и постичь способ их сложения и вычитания, но удача улыбнулась ему, лишь когда он взялся за четырехмерность, и возникли кватернионы. Вскоре после этого возникли восемь измерений и так называемые числа Кэли (октонионы, или октавы). Многие раздумывали, возможны ли — в продолжение этого умственного обобщения — 16-мерные числа, но полвека спустя после грандиозного свершения Гамильтона было доказано, что сие невозможно.

В сухом остатке: Недействительные числа действительно применимы

09 Простые числа

Математика — настолько всеобъемлющий и пронизывающий все дела человеческие предмет, что иногда она видится неусвояемой. Время от времени нам необходимо возвращаться к первоистокам — т. е., разумеется, к счету: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... А еще проще можно?

Что ж, 4 = 2 × 2, а значит, 4 можно разбить на составляющие. Можем ли мы поступить так же и с любыми другими числами? Конечно, вот, например: 6 = 2 × 3, 8 = 2 × 2 × 2, 9 = 3 × 3, 10 = 2 × 5, 12 = 2 × 2 × 3. Это всё составные числа, поскольку составлены из более простых – 2, 3, 5, 7, ... «Неделимые» – это 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... Они называются простыми числами. Простое число делится только на 1 и на само себя. А единица, кстати сказать, – простое ли число? Согласно приведенному определению – должно быть, и многие знаменитые математики прошлого так с ним и обращались, однако современные математические умы начинают ряд простых чисел с 2. Такой подход создает все условия для элегантных формулировок различных теорем. Мы с вами тоже будем считать 2 первым простым числом.

Подчеркнем простые числа в пределах первых целых: 1, **2**, **3**, 4, **5**, 6, **7**, 8, 9, 10, **11**, 12, **13**, 14, 15, 16, **17**, 18, **19**, 20, 21, 22, **23**, ... Изучение простых чисел ведет нас к началу начал. Важность простых чисел – в том, что они суть «атомы» математики. Так же, как и основные химические элементы, из которых состоит множество химических соединений, простые числа задействованы в построении соединений математических.

Математический результат, объединяющий все ранее сказанное, носит величественное имя «основной теоремы арифметики». Она утверждает, что любое целое число, большее 1, может быть записано в виде умноженных друг на друга простых чисел, причем единственным способом с точностью до перестановки сомножителей. Мы уже записывали 12 в виде 2 × 2 × 3, и никакого иного способа разложения на простые

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

300 до н. э.

В «Началах» Евклид приводит доказательство бесконечности простых чисел

230 до н. э.

Эратосфен Киренский описывает метод просеивания целых чисел и выделения из них простых числа для 12 не существует. Часто то же самое записывают в степенном виде: $12 = 2^2 \times 3$. Вот вам еще один пример: 6 545 448 можно записать как $2^3 \times 2^5 \times 7 \times 13 \times 37$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Поиск простых чисел Увы, мы не располагаем формулой для определения простых чисел, и никаких закономерностей их расположения в ряду целых чисел не наблюдается. Один из первых методов их обнаружения был предложен юным современником Архимеда, большую часть жизни прожившим в Афинах, – Эратосфеном Киренским. Точностью его расчета длины экватора в его время премного восхищались. Ныне мы признательны ему за решето, при помощи которого можно выискивать простые числа. Эратосфен представил себе ряд целых чисел, вытянутый в линию. Он подчеркнул **2** и вычеркнул все числа, кратные 2. Далее перешел к 3, подчеркнул это число и вычеркнул все, кратные 3. Таким способом он отсеял все составные числа, а те, что остались, – простые.

Итак, более-менее предсказывать небольшие простые числа мы можем, но как нам определить, простое данное число или нет, если это 19 071 или 19 073, например? За исключением 2 и 5, остальные простые числа должны оканчиваться на 1, 3, 7 или 9, но этого недостаточно, чтобы число оказалось простым. Затруднительно определить, простое или нет большое число, оканчивающееся на 1, 3, 7 или 9, не попробовав разделить его по-всякому. Кстати, $19\,071 = 3^2 \times 13 \times 163$, поэтому оно не простое, а вот 19 073 – очень даже.

Еще одна загвоздка состоит в поиске хоть каких-то закономерностей в распределении простых чисел. Давайте поглядим, сколько простых чисел приходится на каждые 100 в промежутке между 1 и 1000.

Диапазон	1–100	101–200	201–300	301–400	401–500	501–600	601–700	701–800	801–900	901–1000	1–1000
Простых чисел, шт.	25	21	16	16	17	14	16	14	15	14	168

В 1792 году 15-летний Карл Фридрих Гаусс предложил формулу $P(n)$, прогнозирующую количество простых чисел, меньших, чем данное число n (это утверждение называется

1742

Кристиан Гольдбах считает, что любое четное число больше 2 есть сумма двух простых чисел

1896

Теорема о распределении простых чисел доказана

1966

Чэнь Цзинжунь почти подтверждает гипотезу Гольдбаха теоремой о распределении простых чисел). Для $n = 1000$ эта формула дает оценку в 172. Настоящее количество простых чисел — 168, и оно меньше оценочной величины.

Всегда считалось, что это верно для любого значения n, однако простые числа — штука с сюрпризом: было доказано, что для $n = 10^{371}$ (огромное число, полная запись которого содержит 1 с 371 нулем) реальное количество простых чисел *больше* оценочного. На деле оказалось, что в некоторых промежутках на линии целых чисел разница между оценочным количеством простых чисел и реальным встречается то отрицательная, то положительная.

Сколько? Простых чисел бесконечно много. Евклид в своих «Началах» (книга IX, предложение 20) заявляет, что «простых чисел больше любого выделенного множества простых чисел». Элегантное доказательство Евклида выглядит так:

> Предположим, что P — наибольшее из простых чисел, а $N = (2 \times 3 \times 5 \times ... \times P) + 1$. N — либо простое число, либо нет. Если N — простое, это значит, что мы получили простое число, большее, чем P, что противоречит исходному утверждению. Если N — не простое число, значит, оно должно делиться на какое-нибудь другое число, допустим, p, а оно — одно из ряда 2, 3, 5, ..., P. Это означает, что число $N - (2 \times 3 \times 5 \times ... \times P)$ делится на p. Однако это число равно единице, т. е. 1 делится на p. Этого не может быть, поскольку все простые числа — больше 1. Отсюда следует, что каким бы ни было N, получаем противоречие. Исходная установка о том, что число P — наибольшее из простых, ложное. Вывод: количество простых чисел бесконечно.

И хотя простые числа «простираются в вечность», это не мешало людям искать наибольшее известное простое число. Рекорд 2007 года за числом Мерсенна: $2^{24036583} - 1$, что составляет примерно $10^{7235732}$, или число, состоящее из 1 и 7 235 732 нулей.

Неведомое Грандиозные области неведомого — «задача простых близнецов» (вторая проблема Ландау) и знаменитая «проблема (гипотеза) Гольдбаха» (первая проблема Ландау).

Простые близнецы (парные простые числа) — пары простых чисел, отделенные друг от друга одним четным числом. Пары в интервале от 1 до 100 — 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31, 41 и 43, 59 и 61, 71 и 73. Известно также, что существует 27 412 679 близнецов меньше 10^{10}. Это означает, что четные числа с близнецами, например 12 (близнецы — 11 и 13), составляют всего 0,274% чисел в этом ряду. Бесконечно ли множество простых близнецов? Занимательно вышло бы, если б можно было ответить «нет», но пока никому не удалось это доказать.

Кристиан Гольдбах выдвинул гипотезу:

Любое четное число, большее 2, есть сумма двух простых чисел.

Например, 42 — четное число, и его можно записать как 5 + 37. А еще вот так: 11 + 31, 13 + 29 или 19 + 23, но это не имеет значения: главное, что минимум *один* способ у нас точно есть. Гипотеза эта верна в огромном диапазоне чисел — но в целом ее так и не доказали. Однако некоторый прогресс в этом направлении все же есть, и некоторым кажется, что доказательство вот-вот родится, — по крайней мере, китайский математик Чэнь Цзинжунь сделал громадный шаг. Его теорема утверждает, что любое достаточно большое четное число может быть записано как сумма двух простых чисел *или* как сумма простого и полупростого числа (полупростое число — результат умножения двух простых чисел).

Великий теоретик больших чисел Пьер Ферма доказал, что простые числа вида $4k + 1$ можно выразить суммой двух квадратов единственным способом (например, $17 = 1^2 + 4^2$), тогда как простые числа вида $4k + 3$ (например, 19) вообще не могут быть выражены через сумму двух квадратов. Жозеф Лагранж доказал знаменитую математическую теорему о квадратных степенях: *любое* положительное целое число есть сумма четырех квадратов. Например, $19 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2$. За бóльшие степени тоже брались — написаны целые книги теорем, однако многие задачи остались нерешенными.

Число нумеролога

Одна из труднейших областей теории чисел касается так называемой «задачи Варинга» (Уоринга). В 1770 году кембриджский профессор Эдвард Варинг сформулировал задачу записи целых чисел как суммы степенных слагаемых. В предложенных условиях возникает смычка оккультных нумерологических знаний и строгой науки математики — в виде простых чисел, сумм квадратов и кубов. Возьмем число 666, осененное непобедимым нумерологическим ореолом, «число зверя», согласно библейскому «Откровению Иоанна Богослова», — у этого числа есть несколько неожиданных свойств. Это сумма квадратов первых семи простых чисел:

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2.$$

Нумерологи также поспешат добавить, что это палиндромная сумма кубов, а сверх того краеугольным камнем, центром этого палиндрома является 6^3, т. е. $6 \times 6 \times 6$:

$$666 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 2^3 + 1^3.$$

Число 666 и впрямь «число нумеролога».

Мы назвали простые числа атомами математики. Вы можете возразить: дескать, физики давно добрались до структур внутри атома, гораздо более фундаментальных, — до кварков, например. А математика что же? Стояла на месте? Если говорить только о целых числах, то 5 — простое число и останется таковым навсегда. Но Гаусс сделал далеко идущее открытие, и для некоторых простых чисел, например для 5, действительна и такая запись: $5= (1 - 2i) \times (1 + 2i)$, где $i = \sqrt{-1}$, число из царства мнимых. Как плод двух гауссовых чисел 5 и подобные ему величины не настолько неделимы, как это некогда казалось.

В сухом остатке: Атомы математики

10 Совершенные числа

В математике погоня за совершенством приводила искателей в разные удивительные места. Есть, например, совершенный квадрат, но в данном случае это не эстетический эпитет. Он здесь скорее для того, чтобы предупредить: в мире существуют и несовершенные квадраты. Или вот, например, у некоторых чисел есть немного делителей, а у некоторых — уйма. Но, как в сказке про трех медведей, некоторые числа — «в самый раз». Если сумма всех делителей числа равна этому же числу, его называют совершенным.

Греческий философ Спевсипп, принявший бразды правления Академией после смерти своего дяди Платона, провозгласил, что вера пифагорейцев в 10 как в совершенное число – обоснованна. Почему? Потому что количество простых чисел между 1 и 10 (а именно 2, 3, 5 и 7) равно количеству не простых (4, 6, 8, 9), и это наименьшее число с таким свойством. У некоторых, знаете, своеобразные представления о совершенстве.

Думается, у пифагорейцев концепция совершенства была пошире. Математические свойства совершенных чисел описаны в Евклидовых «Началах» и основательно изучены Никомахом 400 лет спустя, и в результате появились дружественные числа и даже взаимно-простые дружественные числа. Эти виды чисел определяются по их отношению друг к другу и к их делителям. Возникла даже теория избыточных и недостаточных чисел, из которой сформировалось еще одно представление о совершенстве.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

525 до н. э.

Пифагорейцам приписывают открытие и совершенных, и избыточных чисел

300 до н. э.

Совершенные числа обсуждаются в книге IX «Начал» Евклида

100 до н. э.

Никомах Герасский создает классификацию чисел, основанную на совершенных числах

Является ли число избыточным или нет, определяется его делителями и связью между сложением и умножением. Возьмем число 30 и рассмотрим его делители — числа, на которые 30 делится без остатка, и при этом меньшие 30. Для такого небольшого числа делителей немного: 1, 2, 3, 5, 6, 10 и 15. Сложив все эти делители, получим 42. Таким образом, 30 — избыточное число, потому что сумма его делителей (42) больше его самого.

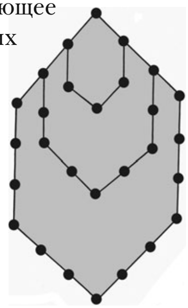
Порядковый номер	1	2	3	4	5	6	7
Совершенное число	6	28	496	8128	33 550 336	8 589 869 056	137 438 691 328

Первые несколько совершенных чисел

Число является недостаточным, если верно обратное: сумма всех его делителей меньше его самого. 26, например, недостаточное, потому что его делители — 1, 2 и 13 — в сумме дают всего 16, а это меньше 26. Простые числа очень недостаточные, потому что сумма их делителей всегда равна 1.

Число не избыточное и не недостаточное — совершенно. Сумма всех делителей совершенного числа равна этому числу. Первое совершенное число — 6. Его делители — 1, 2 и 3 — при сложении дают 6. Пифагорейцы были так очарованы числом 6 и тем, как его части дивно смотрятся вместе, что назвали его «браком, здоровьем и красотой». С числом «6» связана еще одна история, рассказанная Блаженным Августином (354–430). Он верил, что совершенство 6 существовало еще до того, как возник этот мир, а мир создан за 6 дней *именно потому*, что это число совершенно.

Следующее совершенное число — 28. Его делители — 1, 2, 4, 7 и 14, и если их сложить вместе, получится 28. Эти два первых совершенных числа особенные даже среди совершенных чисел: можно доказать, что любое четное совершенное число оканчивается на 6 или 28. После 28 придется подождать аж до 496 — это следующее совершенное число. Легко проверить, действительно ли оно равно сумме своих делителей: 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248. Далее, устремляясь к следующему совершенному числу, мы уходим в числовую стратосферу. Первые пять были известны еще в XVI веке, но мы по-прежнему не нашли самое большое — и не доказали, бесконечен ли их строй. Бытует мнение, что они, как и простые числа, нескончаемы.



Пифагорейцам были интересны и геометрические связи. Если взять совершенное число бусин, их можно нанизать в шестиугольное колье. Для совершенных чисел рангом повыше у нас получится многоярусное шестиугольное ожерелье.

1603

Пьетро Катальди обнаруживает шестое и седьмое совершенные числа: $2^{16}(2^{17} - 1) = 8\,589\,869\,056$ и $2^{18}(2^{19} - 1) = 137\,438\,691\,328$

2006

Великий проект по поиску простых чисел обнаруживает 44-е простое число Мерсенна (почти десять миллионов знаков), но и следующее тоже возможно сгенерировать

Степень	Результат	Минус 1 (число Мерсенна)	Простое число?
2	4	3	простое
3	8	7	простое
4	16	15	не простое
5	32	31	простое
6	64	63	не простое
7	128	127	простое
8	256	255	не простое
9	512	511	не простое
10	1024	1023	не простое
11	2048	2047	не простое
12	4096	4095	не простое
13	8192	8191	простое
14	16384	16383	не простое
15	32768	32767	не простое

Числа Мерсенна Ключ к сборке совершенных чисел – коллекция чисел, названных в честь французского монаха Марена Мерсенна, учившегося в иезуитском колледже вместе с Рене Декартом. Оба желали отыскать совершенные числа. Числа Мерсенна основаны на степенях двойки и удвоенных числах – 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 – и дальнейшем вычитании 1. Число Мерсенна – это $2^n - 1$. Они всегда нечетные, зато не всегда простые. Но те из чисел Мерсенна, что просты, годятся для сборки совершенных чисел.

Мерсенн знал: если степень – не простое число, то число Мерсенна тоже не может быть простым, исходя из степеней 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14 и 15, которые были под рукой. Числа Мерсенна оказывались простыми только в тех случаях, когда степень была простым числом, но достаточное ли это условие? В первых нескольких случаях получаются 3, 7, 31 и 127 – все простые. Так правда ли в целом, что число Мерсенна, полученное при возведении 2 в степень, равную простому числу, само будет простым?

Многие математики древности вплоть до 1500 годов думали, что так и есть. Однако простые числа не так уж просты, и обнаружилось, что для 11-й степени (простое число) $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ простого числа не получается. Кажется, правило все-таки не вытанцовывается. Числа Мерсенна $2^{17} - 1$ и $2^{19} - 1$ действительно – оба простые, а $2^{23} - 1$ простым не выходит:

$$2^{23} - 1 = 8388607 - 1 = 47 \times 178\,481.$$

Стройка Совместное применение работ Евклида и Эйлера дает нам формулу, позволяющую генерировать четные совершенные числа: n – четное совершенное число, лишь если $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, где $2^p - 1$ – число Мерсенна.

Просто хорошие друзья

Упертые математики обычно не увлекаются мистикой чисел, однако нумерология еще жива. Дружественные числа появились вслед совершенным, хотя, вероятно, были известны еще пифагорейцам. Позднее их стали применять для составления любовных гороскопов — в этой сфере их математические свойства применили к зефирным чувствам. 220 и 284 — дружественные числа. Почему? Делители 220 — 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110, если их сложить, получится 284. Вы так и думали? Теперь выпишите делители 284 и сложите их — получите 220. Вот она, подлинная дружба.

Например, $6 = 2^1(2^2 - 1)$, $28 = 2^2(2^3 - 1)$, $496 = 2^4(2^5 - 1)$. Эта формула для расчета четных совершенных чисел дает нам возможность добывать их, если до этого добыты числа Мерсенна. Совершенные числа задавали жару и людям, и компьютерам, и эта гонка продолжится — да еще в таких масштабах, каких далекие предшественники и предвидеть не могли. Английский математик и любитель таблиц Питер Барлоу в начале XIX века считал, что никому не удастся превзойти совершенное число Эйлера:

$$2^{30}(2^{31} - 1) = 2\,305\,843\,008\,139\,952\,128$$

как минимум потому, что в этом не было особого смысла. Ему и в голову не могло прийти, насколько мощны будут современные компьютеры и сколь неутолима жажда математиков преодолевать все новые и новые препятствия.

Простые числа Мерсенна

Выявлять простые числа Мерсенна — дело нелегкое. Многие математики веками расширяли этот список с давней историей, составленный методом проб и ошибок. Великий Леонард Эйлер в 1732 году ввел в него восьмое простое число Мерсенна: $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$. Число Мерсенна № 23*, $2^{11213} - 1$, стало предметом гордости факультета математики Университета Иллинойса в 1963 году — они объявили миру об этом достижении, выпустив тематическую почтовую марку университета. Однако современные мощные компьютеры активно двинули вперед производство чисел Мерсенна: к концу 1970-х старшеклассники Лора Никел и Лэндон Нолл вместе открыли число Мерсенна № 25, а чуть погодя Нолл в одиночку добыл № 26. На 2007 год известно 45 простых чисел Мерсенна.

* Точнее, числа Мерсенна № 21, 22 и 23 были открыты одним и тем же человеком в один и тот же 1963 год — Доналдом Брюсом Жилье.

Нечетные совершенные числа Никто не знает, найдется ли когда-нибудь нечетное совершенное число. Декарту так не казалось, но и мэтры могут ошибаться. Английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр объявил, что существование нечетного совершенного числа — «почти чудо», потому что ему придется соответствовать множеству условий. Неудивительно, что Сильвестр сомневался. Это одна из старейших нерешенных задач математики, однако, если нечетное совершенное число существует, мы про него уже довольно много знаем. Ему необходимо будет иметь как минимум 8 разных простых делителей, один из которых — больше миллиона, а его протяженность — не менее 300 знаков.

В сухом остатке: Таинство чисел

11 Числа Фибоначчи

В «Коде да Винчи» Дэна Брауна убитый куратор Лувра Жак Соньер оставил намек для следствия в виде первых восьми чисел некой последовательности. Умения криптографа Софи Невё позволили выстроить эти числа — 13, 3, 2, 21, 1, 1, 8 и 5 — в правильном порядке и постичь их значение. Знакомьтесь: легендарная численная последовательность всея математики.

Последовательность целых чисел Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 114, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

Эта последовательность широко известна благодаря своим интересным свойствам. Самое основное — и ключевая характеристика, определяющая остальные, — в том, что каждый ее член есть сумма двух предыдущих. Например, 8 = 5 + 3, 13 = 8 + 5, ... 2584 = 1587 + 987 и т. д. Необходимо лишь запомнить, что все начинается с 1 и 1, а остальную последовательность можно запросто сгенерировать не сходя с места. Последовательность Фибоначчи обнаруживается в природе: число спиралей, образующихся из семян в цветке подсолнуха (например, 34 в одну сторону и 55 в другую), пропорции комнат и зданий, планируемые архитекторами. Классические композиторы музыки черпали вдохновение в этих числах, а «Танцевальную сюиту» Бартока считают связанной с последовательностью Фибоначчи. У современного музыканта Брайана Трансо (БТ) в альбоме «Эта двоичная вселенная» есть трек под названием 1,618 — оммаж высочайшей пропорции чисел Фибоначчи, но о ней мы поговорим чуть позже.

Происхождение Последовательность Фибоначчи описана в книге *«Liber Abaci»* («Книга абака»), опубликованной Леонардо

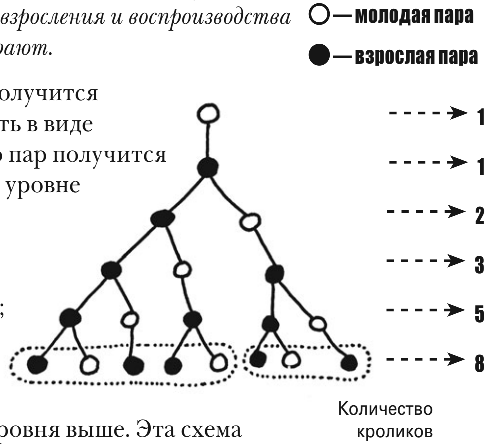
СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1202
Леонардо Пизанский обнародует *«Liber Abaci»* и числа Фибоначчи

1724
Даниэль Бернулли выражает числа Фибоначчи через золотое сечение

Пизанским (Фибоначчи) в 1202 году, но, похоже, этот ряд чисел был известен еще в Древней Индии. Фибоначчи рассмотрел задачу с воспроизводством кроликов:

> *Взрослая пара кроликов производит крольчат ежемесячно. В начале года имеется одна молодая пара кроликов. К концу первого месяца они взрослеют, к концу второго месяца имеется взрослая пара и новорожденная. Процесс взросления и воспроизводства продолжается. Чудесным образом кролики не умирают.*



Фибоначчи хотел понять, сколько пар кроликов получится к концу года. Прирост потомства можно изобразить в виде «фамильного древа». Давайте посмотрим, сколько пар получится к концу мая (пятого месяца). Видим 8 пар. На этом уровне в левой «ветке древа» наблюдаем:

●○●●○

а это – копия уровня, находящегося на один выше; в правой же «ветке» имеем:

●○●

т. е. тоже копию последовательности, что на два уровня выше. Эта схема показывает, что воспроизводство кроликов в этой задаче следует простейшему уравнению Фибоначчи:

количество кроликов через n месяцев = количество через $(n - 1)$ месяцев +
+ количество через $(n - 2)$ месяцев.

Свойства Рассмотрим, что получится, если складывать между собой члены последовательности:

$$1 + 1 = 2$$
$$1 + 1 + 2 = 4$$
$$1 + 1 + 2 + 3 = 7$$
$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$$
$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$$
$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33$$
$$\dots$$

Результаты этих суммирований – тоже последовательность, которую можно записать под исходной, но со сдвигом:

1923
Бела Барток сочиняет «Танцевальную сюиту» — считается, что она вдохновлена числами Фибоначчи

1963
Основан журнал «Ежеквартальный Фибоначчи», посвященный теории чисел последовательности Фибоначчи

2007
Скульптор Питер Рэндлл-Пейдж для парка «Эдем» в Корнуолле (Великобритания) создает 70-тонную скульптуру «Семя» на основе последовательности Фибоначчи

Фибоначчи:	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89 . . .
Сложение:				2	4	7	12	20	33	54	88 . . .

Сложение *n* членов последовательности Фибоначчи оказывается на 1 меньше того члена последовательности, что находится дальше через один. Если хотите знать результат сложения 1 + 1 + 2 + ... + 987, просто вычтите 1 из 2584 и получите 2583. Если складывать числа Фибоначчи, пропуская члены последовательности через один, т. е. 1 + 2 + 5 + 13 + 34, получится 55 – тоже число Фибоначчи. Если складывать так же через один, но начиная со второго члена последовательности, т. е. 1 + 3 + 8 + 21 + 55, ответом будет 88 – число Фибоначчи минус 1.

Квадраты членов последовательности Фибоначчи тоже занимательны. Умножая члены последовательности на самих себя и складывая их, получим еще одну последовательность:

Фибоначчи:	1	1	2	3	5	8	**13**	**21**	34	55 . . .
Квадраты:	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025 . . .
Сложение квадратов:	1	2	6	15	40	104	**273**	714	1870	4895 . . .

В этом случае сложение всех квадратов до *n* члена дает нам тот же результат, что и умножение *n* члена исходной последовательности Фибоначчи на следующий. Например:

$$1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 + 169 = 273 = 13 \times 21.$$

Числа Фибоначчи возникают и там, где их не ожидаешь. Представим кошелек, а в нем – смесь монет достоинством 1 и 2 фунта. Допустим, нам надо посчитать, сколькими способами можно вынуть монеты из кошелька, чтобы получилась определенная общая сумма в фунтах. В этой задаче важен порядок действий. Сумму в 4 фунта можно извлечь любым из этих способов: 1 + 1 + 1 + 1; 2 + 1 + 1 + 1; 1 + 2 + 1; 1 + 1 + 2; 2 + 2. Итого 5 способов – и это пятый член последовательности Фибоначчи. Если нужно извлечь 20 по 1 и 2 фунта, то способов будет 6765 – это 21-е по счету число Фибоначчи! Вот наглядная демонстрация силы простых математических идей.

Золотое сечение Если приглядеться к соотношению членов последовательности Фибоначчи, т. е. к результатам деления последующего члена на предыдущий, можно увидеть еще одно замечательное свойство чисел Фибоначчи. Давайте проделаем это с первыми несколькими – от 1 до 55.

1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34
1,000	2,000	1,500	1,333	1,600	1,625	1,615	1,619	1,617

Довольно быстро эти соотношения приблизятся к величине, называемой «золотым сечением» – знаменитым числом в математике, обозначаемым греческой буквой ϕ. Она занимает почетное место среди математических констант, таких как π и e, и имеет свое точное значение:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

а приблизительное десятичное значение этого числа – 1,618033988... Немного потрудившись, мы сможем показать, что через ϕ может быть выражено любое число Фибоначчи.

Несмотря на обилие знаний о последовательности Фибоначчи, которыми мы располагаем, вопросов без ответов по-прежнему немало. Первые простые числа в ряду Фибоначчи – 2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, но мы не знаем, бесконечно ли количество простых чисел в этой последовательности.

Фамильное сходство Последовательность Фибоначчи с гордостью располагается в обширном семействе сходных последовательностей. Блистательный член этого семейства – последовательность, связанная с поголовьем скота. Вместо кроличьих пар последовательности Фибоначчи, превращающихся через месяц в половозрелую размножающуюся пару, у пар сельского скота наблюдается промежуточная фаза созревания – юные пары дорастают до незрелых, после чего становятся взрослыми и лишь затем могут размножаться. Вот как выглядит эта «коровья» последовательность*:

1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13,19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, ...

Поголовье коров

Таким образом, поколение «проскакивает» одно значение, т. е. 41 = 28 + 13 и 60 = 41 + 19. Эта последовательность по свойствам похожа на последовательность Фибоначчи. Если члены коровьей последовательности делить попарно аналогично тому, как мы это проделали с числами Фибоначчи, в пределе получим постоянную, обозначаемую греческой буквой «пси» – ψ:

$$\psi = 1{,}46557123187676802665...$$

Ее также называют «сверхзолотым сечением».

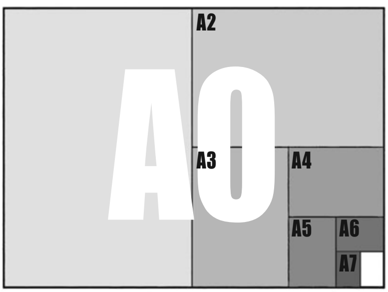
* Полное название — последовательность коров Нараяны, названа в честь индийского математика XIV века.

В сухом остатке: Код да Винчи расшифрован

12 Золотые пропорции

Прямоугольники — повсюду: здания, фотографии, окна, двери, даже эта книга. Прямоугольники дороги и художникам — Пит Мондриан, Бен Николсон и другие абстракционисты без них не обходились. Так какой же прямоугольник всех милее? Может, длинный узкий прямоугольник Джакометти или тот, что почти квадрат? Или тот, что где-то между этими двумя крайностями?

А имеет ли вообще смысл такой вопрос? Некоторые считают, что да, и верят, что некоторые прямоугольники «идеальнее» прочих. Среди последних, вероятно, золотой прямоугольник — самый любимый. Прямоугольники можно выбирать исходя из их пропорций — это и есть единственный критерий оценки «идеальности», а золотой прямоугольник в этом смысле — особенный, он вдохновлял художников, архитекторов и математиков. Но сначала рассмотрим кое-какие другие.



Математическая бумага Возьмем лист бумаги A4, 210 мм по короткой стороне и 297 мм — по длинной, соотношение сторон 297/210, что приблизительно равно 1,4142. По международному стандарту бумаги A, у которой короткая сторона листа равна b, длинная непременно будет равна $1{,}4142 \times b$. Для A4 $b = 210$ мм, для A5 — 148 мм. Формула, определяющая размеры бумаг A, придает именно этим размерам крайне полезное качество, которого нет у бумаг произвольного размера. Если бумажный лист скроен по системе A, то его сложением пополам мы получаем два прямоугольника меньшего размера, пропорциональных большему. Эти два прямоугольника — меньшие версии того же *исходного* прямоугольника.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

ок. 300 до н. э. Крайнее и среднее отношения приведены в Евклидовых «Началах»

1202 Леонардо Пизанский публикует «*Liber Abaci*»

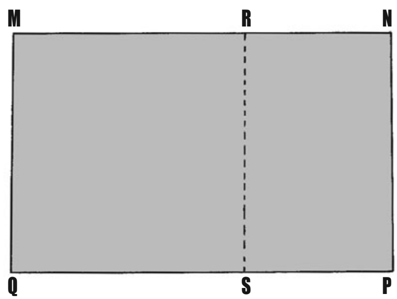
Так, лист А4, сложенный пополам, образует два листа А5. Аналогично из листа А5 получаются два А6. Два листа А4 составляют А3. Чем меньше номер в системе А, тем больше лист бумаги. Как мы узнали, что именно соотношение 1,4142 даст нам такое замечательное свойство? Сложим лист бумаги, но на этот раз возьмем такой, в котором мы не знаем длину большей стороны. Допустим, ширина прямоугольника равна 1, а длину запишем как x, тогда соотношение длины к ширине получится $x/1$. Теперь сложим этот прямоугольник пополам, и тогда соотношение длины к ширине – $1/{}^{1}/_{2}x$, а это выражение равно $2/x$. Суть размеров в системе А в том, что эти два соотношения должны равняться одному и тому же числу, и поэтому получаем уравнение $x/1 = 2/x$, откуда $x^2 = 2$. Таким образом, истинное значение $x = \sqrt{2}$, что примерно равно 1,4142.

Математическое золото Золотой прямоугольник – другое дело, но лишь слегка. В данном случае он складывается по линии *RS* (см. рисунок ниже) так, чтобы фигура *MRSQ* была *квадратом.*

Ключевое свойство золотого прямоугольника в том, что прямоугольник *RNPS* пропорционален исходному прямоугольнику, т. е. после выделения квадрата оставшийся прямоугольник должен быть мини-репликой большого.

Как и ранее, установим, что ширина большого прямоугольника $MQ = MR$ и равна 1, а длину большей стороны *MN* обозначим как x. Соотношение длины к ширине большого прямоугольника, как и в предыдущем случае, – $x/1$. На этот раз ширина меньшего прямоугольника *RNPS* есть $MN - MR$, т. е. $x - 1$, и тогда соотношение сторон этого прямоугольника равно $1/(x - 1)$. Приравняв оба соотношения, получим уравнение:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1},$$



которое можно упростить до вида $x^2 = x + 1$. Округленное значение корня этого уравнения равно 1,618. Это легко проверить. Если набрать 1,618 на калькуляторе и умножить на себя само, получится 2,618, что то же самое, что и $x + 1 = 2{,}618$. Это число и есть знаменитое золотое сечение, обозначаемое греческой буквой «фи» – ϕ:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887498948482 0\ldots$$

а это число связано с последовательностью Фибоначчи и задачей о кроликах (см. стр. 44).

1509

Фра Лука Пачоли публикует «О божественной пропорции»

1876

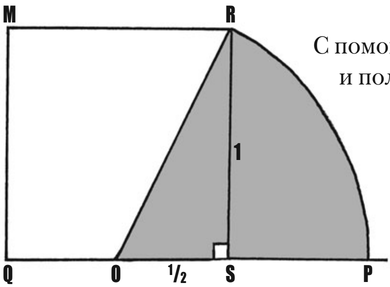
Густав Теодор Фехнер пишет о психологических экспериментах с определением пропорций самого «эстетичного» прямоугольника

1975

Международная организация по стандартизации (ISO) устанавливает размеры бумаги А

Идем на золото Теперь давайте разберемся с построением золотого прямоугольника. Начнем с квадрата *MRSQ* со сторонами, равными 1, и отметим середину стороны *QS* буквой *O*. Длина $OS = \frac{1}{2}$, и тогда, согласно теореме Пифагора (см. стр. 85), в треугольнике *ORS* сторону *OR* можно выразить так:

$$OR = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right) + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



С помощью циркуля рисуем дугу *RP* с центром в точке *O* и получаем $OP = OR = \sqrt{5}/2$. Теперь сведем все в одно равенство:

$$QP = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

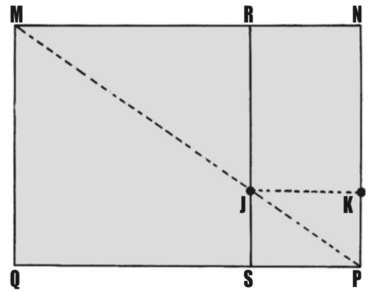
Это и есть искомое золотое сечение, или длина стороны золотого прямоугольника.

История От золотого сечения ϕ ожидают многого. Выявленные удивительные математические свойства золотого сечения обусловливают его кажущееся всеприсутствие – даже в тех местах, где его нет. Еще опаснее заявлять, что золотое сечение возникло еще до того или иного объекта – дескать, музыканты, архитекторы и художники имели его в виду в момент создания произведения. Такой пунктик называется *«golden numberism»* (англ. «золотой числизм»). Склонность к бездоказательным обобщениям на основании чисел – опасная дискуссионная стратегия.

Вот, к примеру, афинский Парфенон. Когда его строили, о золотом сечении, разумеется, знали, но это не означает, что Парфенон сконструирован с его учетом. Да, отношение ширины к высоте (включая треугольный фронтон) фасада Парфенона – 1,74, что, конечно, близко к 1,618, но достаточно ли, чтобы считать золотое сечение основой этого архитектурного замысла? Некоторые полагают, что фронтон в расчеты включать не нужно, и тогда отношение ширины к высоте составит целое число 3.

В книге 1509 года *«De divina proportione»* («О божественной пропорции») Лука Пачоли «открыл» связи между свойствами Бога и пропорциями, определяемыми ϕ. Он окрестил это «божественной пропорцией». Пачоли был францисканцем, написал несколько важных математических трудов. Некоторые считают его «отцом бухгалтерского дела» – он популяризовал метод двойной бухгалтерии, распространенный среди венецианских купцов. Кроме того, он стяжал славу и как учитель математики самого Леонардо да Винчи. Во времена Возрождения золотое сечение получило почти мистический статус – астроном Иоганн Кеплер описывал его как «бесценную жемчужину» математики. Позднее Густав Фехнер, немецкий экспериментальный психолог, проделал тысячи измерений прямоугольных объектов (игральных карт, книг, окон) и обнаружил, что наиболее часто встречающееся соотношение сторон близко по значению к ϕ.

Ле Корбюзье также был зачарован прямоугольником как центральным элементом архитектурного дизайна и в особенности — золотым прямоугольником. Он премного ценил гармонию и порядок — и обрел их в математике. Он воспринимал архитектуру глазами математика. Одной из его фирменных наработок стал «Модулор» — система пропорций. Благодаря ей Ле Корбюзье смог генерировать поток золотых прямоугольников — форм, которые архитектор использовал в своих дизайнерских решениях. Его вдохновлял Леонардо да Винчи, который, в свою очередь, пристально изучал наследие римского архитектора Витрувия, отталкивавшегося от пропорций человеческого тела.



Другие формы Есть еще и «сверхзолотой прямоугольник», и его можно спроектировать аналогично золотому.

Сверхзолотой прямоугольник *MPQN* строим так. Отсекаем, как и прежде, квадрат *MRSQ* и считаем его сторону равной 1. Чертим диагональ *MP* и отмечаем точку пересечения со стороной *RS* буквой *J*. Далее проводим линию *JK*, параллельную *RN*, а точку пересечения со стороной *NP* как раз и обозначаем буквой *K*. Будем считать длину *RJ* равной y, а длину *MN* — равной x. Для любого прямоугольника $RJ/MR = NP/MN$ (потому что треугольники *MRJ* и *MNP* — подобные), и тогда $y/1 = 1/x$, что означает $x \times y = 1$, а значит, x и y обратны друг другу. Сверхзолотой прямоугольник получаем в том случае, когда *RJKN* пропорционален исходному *MPQN*, т. е. $y/(x-1) = x/1$. Поскольку $xy = 1$, то длина сверхзолотого прямоугольника x может быть найдена решением кубического уравнения $x^3 = x^2 + 1$, которое, очевидно, очень похоже на $x^2 = x + 1$ (уравнение, с помощью которого мы рассчитали золотой прямоугольник). Кубическое уравнение имеет одно положительное решение — ψ (заменим x более привычным для этой величины символом ψ), и его значение равно 1,46557123187676802665... Это число, которое мы уже находили применительно к «коровьей» последовательности (см. стр. 47). Золотой прямоугольник можно выстроить при помощи линейки и циркуля, со сверхзолотым прямоугольником все не так просто.

В сухом остатке: Божественные пропорции

13 Треугольник Паскаля

Число 1 — очень важное, а 11? Интересно и то, что 11 × 11 = 121, 11 × 11 × 11 = 1331, а 11 × 11 × 11 × 11 = 14641. Если выстроить эти числа горкой, получится

11
121
1331
14641

Это первые строки треугольника Паскаля. Откуда же он взялся?

Добавим-ка еще $11^0 = 1$ – для ровного счета, а во-вторых, плюнем на разряды и расставим пробелы между всеми цифрами: 14641 превратится у нас в 1 4 6 4 1.

Треугольник Паскаля знаменит в математике своей симметричностью и скрытыми взаимоотношениями между числами в нем. В 1653 году Блез Паскаль точно так и думал – и отметил, что не смог бы описать их все в одном труде. Множество связей треугольника Паскаля с другими областями математики превратили этот конструкт в предмет поклонения, но его происхождение куда древнее. Паскаль на самом деле не изобрел треугольник, названный его именем, – эта математическая достопримечательность была известна еще китайским мыслителям XIII века.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля строится сверху вниз. Расположим в вершине 1 и разместим по единице слева и справа в следующем ряду. Дальнейшие ряды строим, всякий раз вписывая единицы по краям, а внутри ряда числа образуются путем сложения тех, что расположены выше уровнем правее и левее от искомой.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

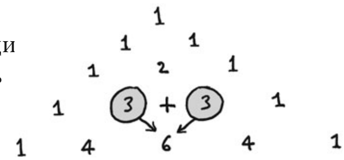
около 500 до н. э.

Фрагментарные свидетельства о существовании треугольника Паскаля в санскритских источниках

около 1070

Омар Хайям открывает треугольник, в некоторых странах ныне носящий его имя

Чтобы получить 6 в пятом ряду, например, складываем 3 и 3, расположенные на ряд выше. Английский математик Г. Х. Харди говаривал, что «математик, подобно художнику или поэту, есть создатель узоров», а уж треугольник Паскаля — всем узорам узор.



Связи с алгеброй Треугольник Паскаля — это и в чистом виде математика. Если произвести умножение $(1 + x) \times (1 + x) \times (1 + x) = (1 + x)^3$, например, то получим $1 + 3x + 3x^2 + x^3$. Приглядитесь — и увидите, что коэффициенты перед переменными в этом выражении совпадают с числами в соответствующем ряду треугольника Паскаля. Он нас преследует:

$(1+x)^0$						1					
$(1+x)^1$					1		1				
$(1+x)^2$				1		2		1			
$(1+x)^3$			1		3		3		1		
$(1+x)^4$		1		4		6		4		1	
$(1+x)^5$	1		5		10		10		5		1

Если сложить числа в любом ряду треугольника Паскаля, получится степень 2. Например, в пятом ряду $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$. Это следует и из левой колонки, см. выше, при $x = 1$.

Свойства Первое и самое очевидное свойство треугольника Паскаля — в его симметрии. Если провести вертикальную линию через середину, левая и правая его половины окажутся «зеркально симметричны». Благодаря этому можно говорить и о «диагоналях» этого треугольника, поскольку северо-восточная диагональ будет идентична северо-западной. Под диагональю из одних единиц увидим диагональ натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., а ниже — треугольных чисел 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... (числа, которые можно собрать в треугольники из точек). Далее — диагональ тетраэдрических чисел: 1, 4, 10, 20, 35, 56, ... Эти числа можно организовать в тетраэдры («трехмерные треугольники» или, если угодно, в горки пушечных ядер, сложенные так, чтобы в основании был треугольник). А как обстоят дела с «почти диагоналями»?

«Почти диагонали» треугольника Паскаля

1303
Чжу Шицзе дает определение треугольника Паскаля и производит суммирования некоторых последовательностей в нем

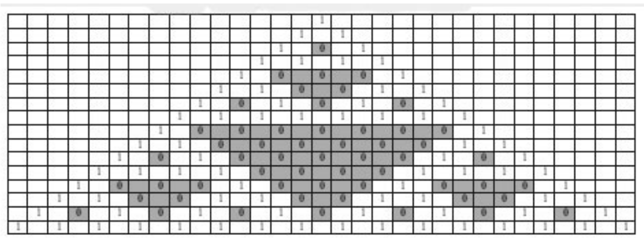
1664
Посмертно опубликована работа Паскаля по свойствам треугольника

1714
Готфрид Вильгельм Лейбниц (Ляйбниц) описывает гармонический треугольник

Если суммировать числа вдоль линий, пересекающих наш треугольник и не являющихся ни рядами, ни диагоналями, получится последовательность 1, 2, 5, 13, 34, ... Каждое число в три раза больше предыдущего минус предпредыдущее.

Например, $34 = 3 \times 13 - 5$. Исходя из этого правила, следующим членом такой последовательности после 34 будет $3 \times 34 - 13 = 89$. Между этими «почти диагоналями» есть набор других, порождающих последовательность с началом 1, $1 + 2 = 3$ — т. е. вот такую: **1**, **3**, **8**, **21**, **55**, ..., но и она подчиняется правилу «в 3 раза больше минус 1». Значит, мы можем сгенерировать следующий член этой последовательности: $3 \times 55 - 21 =$ **144**. Но и это еще не все. Если перемежать эти две последовательности, получим числа Фибоначчи:

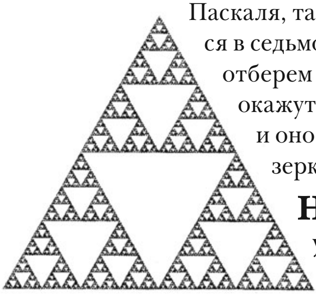
1, **1**, 2, **3**, 5, **8**, 13, **21**, 34, **55**, 89, **144**, ...



Четные и нечетные числа в треугольнике Паскаля

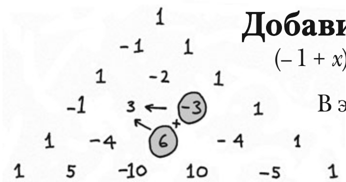
Комбинации Паскаля

Числа Паскаля решают некоторые проблемы счета. Вообразите 7 человек в одной комнате. Назовем их **А**ида, **К**этрин, **Э**мма, **Г**эри, **Д**он, **М**этью и **Т**омас. Сколькими способами можно сгруппировать их по трое? Например, **А**, **К** и **Э** или **А**, **К** и **Т**. Математики для пользы дела записывают число, находящееся в ряду n на месте r (считая от $r = 0$) в треугольнике Паскаля, так: $C(n, r)$. Ответом на наш вопрос будет $C(7, 3)$. Число, находящееся в седьмом ряду на третьем месте в треугольнике Паскаля, — 35. Если мы отберем из наших семерых троих, остальные четверо автоматически окажутся в группе «не отобранных». Это равносильно записи $C(7, 4)$, и оно тоже равно 35. В общем верно $C(n, r) = C(n, n - r)$ — благодаря зеркальной симметричности треугольника Паскаля.



Салфетка Серпиньского

Нули и единицы В треугольнике Паскаля можно заметить узоры из чисел — в зависимости от того, четные они или нечетные. Если заменить единицами четные числа, а нулями — нечетные, получится узор, похожий на замечательный фрактал, известный как треугольник («салфетка») Серпинского (см. стр. 102).



Добавим знаки

Добавим знаки Можно записать треугольник Паскаля в степенях $(-1 + x)$, а именно $(-1 + x)^{-n}$.

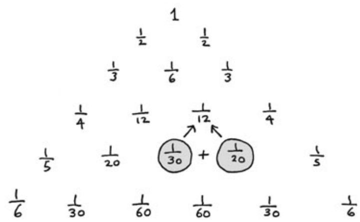
В этом случае треугольник получается не вполне симметричный относительно вертикальной оси, и вместо суммирования с результатом, равным степеням 2, ряды дают нам сумму, равную 0. Диагонали, однако, по-прежнему интересны.

Юго-западная диагональ 1, –1, 1, –1, 1, –1 , 1, –1, ... дает нам коэффициенты ряда:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + \dots$$

а члены следующей диагонали — коэффициенты вот такого ряда:

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - 8x^7 + \dots$$



Гармонический треугольник Лейбница

Гармонический треугольник Лейбница Немецкий энциклопедист Готфрид Лейбниц открыл замечательное множество чисел — в виде треугольника. Числа Лейбница симметричны относительно вертикальной оси. Но, в отличие от треугольника Паскаля, число, находящееся в одном ряду, получается при сложении двух чисел на ряд *ниже*. Например, 1/30 + 1/20 = 1/12. Чтобы построить такой треугольник, можно двигаться сверху вниз и слева направо, вычитая: 1/12 и 1/30 мы знаем, и тогда 1/12 – 1/30 = 1/20 — вот число справа от 1/30. Вы, быть может, уже заметили, что вдоль внешней стороны треугольника размещается знаменитая гармоническая последовательность:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots,$$

однако вторая диагональ — так называемый ряд Лейбница:

$$\frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)},$$

который путем хитрых манипуляций приводится к виду $n/(n+1)$. Как и ранее, мы можем записать числа Лейбница как $B(n, r)$, где n — номер числа в ряду r. Они связаны с обычными числами Паскаля $C(n, r)$ следующей формулой:

$$B(n, r) \times C(n, r) = \frac{1}{n+1}.$$

Словами старой песни, «коленка к бедренной кости, а та — к безымянной кости»*: треугольник Паскаля тесно связан со многими областями математики — современной геометрией, комбинаторикой и алгеброй, и это еще далеко не все. Но главное в том, что треугольник Паскаля — пример тяготения математического ремесла к закономерностям и гармонии, что упрочивают наше понимание этого предмета.

* Спиричуэл *«Dem Bones»* («Те кости»), написанная Джеймсом Уэлдоном Джонсоном (1871–1938) по мотивам Книги пророка Иезекииля (Иез., 37:1–14).

В сухом остатке: Фонтан чисел

14 Алгебра

Алгебра дает нам способы решения задач — это дедуктивный метод с секретом, а секрет заключается в «мышлении задом наперед». Вот, к примеру, задачка: взять число 25, прибавить к нему 17 и получить 42. Это мышление «вперед». Нам выдали числа, и нам их лишь нужно сложить. А теперь давайте представим, что нам дан ответ — 42, а вопрос поставлен совсем иначе. Тут-то нам и пригодится уметь думать задом наперед. Требуется найти значение x, которое позволит решить уравнение $25 + x = 42$, и мы для этого вычитаем 25 из 42.

Арифметические задачки, которые положено решать алгебре, веками задавали школьникам:

Моей племяннице Мишель 6 лет, а мне – 40.
Когда я стану старше ее ровно втрое?

Можно, конечно, решить эту задачу путем подбора, но алгебра экономичнее. В x лет, начиная от нынешнего года, Мишель будет $6 + x$ лет, а мне будет $40 + x$. Я буду втрое старше ее, когда

$$3 \times (6 + x) = 40 + x.$$

Производим умножение в левой части уравнения и получаем $18 + 3x = 40 + x$, переносим все «иксы» на одну сторону уравнения, а все числа — на другую, и получаем $2x = 22$, стало быть $x = 11$. Когда мне исполнится 51, Мишель будет 17. Фокус-покус!

А как нам узнать, когда я стану вдвое старше ее? Применим тот же подход и на этот раз получим вот такое уравнение:

$$2 \times (6 + x) = 40 + x,$$

решением которого будет $x = 28$. Ей будет 34, а мне — 68. Все вышеприведенные уравнения — простейшего вида, они называются «линейными».

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1950 до н. э.
Вавилоняне умеют обращаться с квадратными уравнениями

250
Диофант Александрийский публикует «Арифметику»

В них нет членов типа x^2 или x^3, усложняющих решение. Уравнения с членами вроде x^2 называются «квадратными», а с x^3 – «кубическими». Когда-то x^2 представляли в виде квадрата, а x^3 – в виде куба, поэтому уравнения с такими членами и получили свои названия.

Математика пережила серьезные перемены, перейдя от арифметики к науке символов – алгебре. Переход от чисел к буквам – серьезный умственный скачок, но он стоит затраченных на него усилий.

Истоки Алгебра была заметной частью трудов арабских мыслителей IX века. Аль-Хорезми написал учебник математики, содержавший арабское слово «ал-джабр». Решая практические задачи в терминах линейных и квадратных уравнений, Аль-Хорезми назвал «науку уравнений» словом, от которого происходит «алгебра». Омара Хайяма прославили строки из его «Рубайята»:

Вина кувшин и хлеба мне – и Ты
Со мною рядом песнь поешь в тиши,

хотя в 1070 году в свои 22 года он написал книгу по алгебре, в которой исследовал решения кубических уравнений.

Величайшая работа Джироламо Кардано по математике, опубликованная в 1545 году, стала поворотной точкой в теории уравнений – она оказалась богата на решения уравнений третьей и четвертой степеней, т. е. содержащих x^3 и x^4. Благодаря этой активной исследовательской деятельности стало известно, что квадратные, кубические и уравнения четвертой степени можно решать при помощи операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения степенных корней.

Например, квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно решить, применив формулу:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Алгебра по-итальянски

Теория кубических уравнений была полностью создана в эпоху Возрождения. К сожалению, развитие этой системы привело ко всяким некрасивым поступкам математиков. Сципионе дель Ферро обнаружил решение различных специфических форм кубического уравнения, а венецианский учитель Никколо Фонтана, по прозванию Тарталья, или «Заика», опубликовал собственные алгебраические изыскания, но сохранил свои приемы в тайне. Джироламо Кардано из Милана уговорил Тарталью изложить ему эти самые приемы, поклявшись никому не рассказывать. Тем не менее метод Тартальи все-таки просочился вовне: в свой труд *«Ars Magna»* («Великое искусство») 1545 года Кардано включил метод Фонтаны, и между учеными вспыхнула вражда.

825
Аль-Хорезми дарит математике производное от слова ал-джабр» — «алгебра»

1591
Франсуа Виет пишет математический текст в символах, обозначающих известные и неизвестные величины

1920-е
Амалия Эмми Нётер публикует работы по развитию современной абстрактной алгебры

1930
Бартель ван дер Варден публикует знаменитую «Современную алгебру»

Если требуется решить уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$, нужно всего лишь подставить в эту формулу значения $a = 1$, $b = -3$ и $c = 2$.

Формулы для решения кубических уравнений и уравнений четвертой степени длиннее и неповоротливее, но они тем не менее существуют. В тупик математиков поставила неспособность измыслить формулу для общего решения уравнений пятой степени, в которых фигурирует x^5. Что же такого особенного в пятой степени?

В 1826 году Нильс Абель, проживший, увы, недолгую жизнь, предложил замечательный выход из всей этой путаницы с уравнениями пятой степени. Он доказал невозможность общего решения — обычно добиться такого результата едва ли не труднее, чем доказать, что нечто может быть совершено. Абель доказал, что формулы для решения уравнений пятой степени быть не может, и заключил, что любые дальнейшие поиски этого конкретного Грааля будут впустую. Абель убедил тогдашних мэтров математики, однако эта новость далеко не сразу добралась до широких математических кругов. Некоторые отказывались принять этот результат, и почти весь XIX век ученые публиковали работы, в которых похвалялись найденной — несуществующей — формулой.

Современность На протяжении 500 лет алгеброй обозначали «теорию уравнений», но в XIX веке дело приобрело новый оборот. Люди осознали, что символы алгебры могут представлять далеко не только числа, а и «высказывания», а значит, алгебра может быть связана с наукой логикой. А еще символы могут представлять многомерные объекты — например, те, что изучает линейная алгебра (см. стр. 156). И, как издавна подозревали не-математики, эти символы могут вообще ничего не обозначать и их можно просто переставлять туда-сюда по определенным (формальным) правилам.

Значительным событием в современной алгебре стало открытие ирландцем Уильямом Роуэном Гамильтоном кватернионов — в 1843 году. Гамильтон пытался нащупать систему символов, которые бы распространили двухмерные комплексные числа на пространства с большей размерностью. Много лет он возился с трехмерными символами, но никакой стройной системы у него не получалось. Когда ежеутренне он спускался к завтраку, сын спрашивал его: «Что же, отец, можешь ли ты *умножать* тройки?», и Гамильтону ничего не оставалось, как признавать, что он их может лишь складывать и вычитать.

Успех, однако, пришел неожиданно. Поход в трехмерность застрял в тупике — Гамильтону следовало отправиться за четырехмерными символами. Это озарение посетило его на прогулке с женой вдоль Королевского канала в Дублине. Открытие привело его в полный восторг. Не медля ни мгновения, 38-летний вандал, королевский астроном Ирландии, рыцарь Королевства, нацарапал ключевые соотношения на камнях Бруэмского моста — это место ныне отмечено мемориальной доской. Тот памятный день врезался Гамильтону в сознание, а предмет откровения совершенно поглотил его. Годами Гамильтон читал лекции и опубликовал две толстенные книги о своей «плывущей вдаль мечте о четырех»*.

Особенно любопытно одно качество кватернионов: при их умножении принципиальное значение имеет порядок этого умножения — в отличие от правил обычной арифметики. В 1844 году немецкий лингвист и математик Герман Грассман обнародовал еще одну алгебраическую систему — правда, с меньшей помпой. Не замеченная современниками, эта система возымела далеко идущие последствия. Ныне и кватернионы, и алгебра Грассмана (внешняя алгебра) приложимы и к геометрии, и к физике, и к компьютерной графике.

* Последняя строка стихотворения «Четверка» *(The Tetractys),* посвященного У. Р. Гамильтоном кватернионам.

Абстрактное В XX веке в алгебре преобладал аксиоматический метод. Он был основой евклидовой геометрии, однако до относительно недавнего времени к алгебре не применялся.

Немецкий математик Амалия Эмми Нётер была мастером абстрактного метода. Основная идея современной алгебры — изучение структуры, в которой отдельные примеры находятся в подчиненном положении по отношению к абстрактному понятию. Если отдельные примеры имеют похожую структуру, но, допустим, различаются в написании, их называют изоморфными.

Наиболее фундаментальной алгебраической структурой является группа, и определяется она набором аксиом (см. стр. 155). Есть структуры с меньшим числом аксиом (например, группоиды, полугруппы и квазигруппы) и с бóльшим (например, кольца, тела, области целостности и поля). Все эти новые слова появились в математике в начале XX века — тогда-то алгебра и превратилась в абстрактную науку, известную под названием «современная алгебра».

В сухом остатке: Найти неведомое

15 Алгоритм Евклида

Аль-Хорезми подарил нам слово «алгебра», но понятие «алгоритм» появилось в его книге IX века по арифметике. «Ал-Гор-ритм»* — концепция, применимая и к математикам, и к компьютерщикам. Что же это на самом деле? Ответ на этот вопрос приблизит нас к пониманию евклидова алгоритма поиска наибольшего общего делителя.

Во-первых, алгоритм — это шаблон, инструкция «делай раз, делай два». Понятно, почему компьютерам так любы алгоритмы: машины не сбиваются с заданного пути, поэтому им подавай инструкции. Некоторые математики считают алгоритмы скучными, потому что они основаны на повторении, однако создать алгоритм и превратить его в сотни строк компьютерного кода, содержащего математические инструкции, — не фунт изюма: всегда есть риск, что все пойдет совсем не туда. Прописать алгоритм — творческий труд. Часто существует несколько методов выполнить одну и ту же задачу, и необходимо выбрать наилучший. Некоторые алгоритмы «не соответствуют поставленной задаче», а некоторые — попросту неэффективны из-за своей путанности. Кое-какие шустры, но производят неправильные ответы. Создание алгоритмов смахивает на кулинарное искусство. Существуют сотни рецептов (алгоритмов) приготовления жареной фаршированной индейки. Ни к чему нам плохонький алгоритм приготовления этого блюда — в тот единственный день в году, когда он имеет значение. У нас есть все необходимые продукты — и инструкции по приготовлению. Начало (упрощенного) рецепта может выглядеть примерно так:

— нафаршируйте индейку начинкой;
— натрите шкуру индейки сливочным маслом;
— добавьте соли, перца и паприки;

* Отсылка к Алберту Арнолду (Элу) Гору (р. 1948), бывшему вице-президенту США, среди многого прочего — неофициальному консультанту «Гугла» и члену совета директоров корпорации «Эппл», пропагандисту концепций «электронного правительства» и «информационного суперхайвея».

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

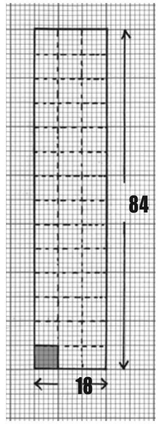
Около 300 до н. э.

Алгоритм Евклида опубликован в «Началах», книга VII

Около 300

Сунь-цзы формулирует китайскую теорему об остатках

– жарьте при температуре 335 °C 3,5 часа;
– дайте готовой индейке отстояться 0,5 часа.



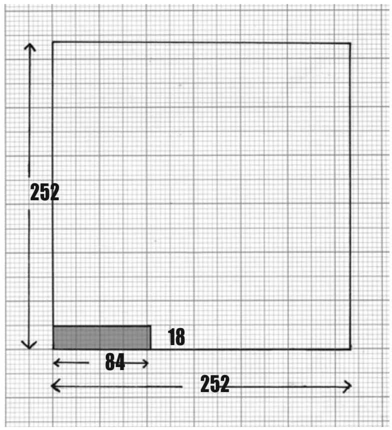
От нас требуется лишь пошагово следовать алгоритму. Рецепт от математического алгоритма отличает одна деталь: в алгоритме обычно учтена возможность возврата к началу, т. е. рекурсивность. В отношении индейки все-таки хочется надеется, что ее – одну и ту же – дважды готовить не придется.

В математике тоже есть «продукты», «ингредиенты» – это числа. Алгоритм Евклида придуман для нахождения наибольшего общего делителя (НОД). НОД двух целых чисел – самое большое число, на которое оба исходных делятся без остатка. Для примера в качестве ингредиентов возьмем 18 и 84.

Наибольший общий делитель НОД в нашем случае – число, на которое делится и 18, и 84 без остатка. На 2 делится и 18, и 84, но еще они делятся и на 3. Таким образом, оба числа делятся и на 6. А есть ли еще большее число, на которое они оба делятся? Можем попробовать 9 и 18. Проверяем и получаем, что 84 на эти два числа без остатка не делится, а значит, 6 – наибольшее число, на которое делятся 18 и 84. Из этого следует, что НОД(18, 84) = 6.

НОД можно представить в терминах укладывания кухонной плитки: это наибольший размер одной плитки, которой можно отделать стену высотой 18 и длиной 84, не прибегая к резке плиток. В нашем случае размер такой плитки составляет 6 × 6.

Помимо наибольшего общего делителя есть еще и наименьшее общее кратное (НОК). НОК 18 и 84 – наименьшее число, делящееся и на 18, и на 84. Связь между НОД и НОК делает очевидным то, что НОК двух чисел, умноженное на их НОД, равно результату умножения этих двух исходных чисел. НОК(18, 84) = 252, 6 × 252 = 1512 = 18 × 84.



Укладывание квадрата прямоугольной плиткой 18 × 84

Геометрически НОК есть длина стороны наименьшего квадрата, который можно отделать прямоугольными плитками 18 × 84. Поскольку НОК (a, b) = ab ÷ НОД (a, b), сосредоточимся на определении НОД. Мы уже вычислили НОД (18, 84) = 6, но для этого нам нужно было знать все делители и 18, и 84.

810
Аль-Хорезми привносит в математику слово «алгоритм»

1202
Фибоначчи включает текст о конгруэнтном методе в *«Liber Abaci»*

1975-е
Китайская теорема об остатках применяется при шифровании сообщений

Вспомним: сначала мы разбили оба числа на их делители: $18 = 2 \times 3 \times 3$ и $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$. Сравнив их, видим, что оба числа делятся на 2 и это высшая степень двойки, на которую они делятся. Аналогично 3, также в первой степени, является делителем для обоих чисел, а на 7 делится только 84, а 18 – нет, и поэтому не может быть НОД. Итого получаем $2 \times 3 = 6$, и это и есть наибольший общий делитель 18 и 84. А можно ли как-то избежать этой возни с делителями? Вообразите, что нам нужно найти НОД (17640, 54054): для начала придется выписать все делители каждого из этих двух чисел, и лишь после этого можно приняться за подбор НОД. Должен же быть какой-то путь попроще?

Алгоритм Такой путь есть. Алгоритм Евклида приводится в «Началах», книга VII, предложение 2: «Даны два числа, не кратные друг другу; найти их наибольшую общую меру».

Алгоритм Евклида элегантен, эффективен и позволяет легко избежать усилий по выявлению всех делителей простым отбрасыванием. Давайте посмотрим, как он работает.

Задача – найти d = НОД(18, 84). Начнем с деления 84 на 18. Нацело разделить не получится – выйдет 4 и 12 в остатке:

$$84 = \mathbf{4} \times 18 + 12.$$

Поскольку d должно делить и 84 и 18, оно должно делить и 12. Значит, d = НОД(12, 18). Повторим процесс деления – теперь 18 на 12:

$$18 = \mathbf{1} \times 12 + 6.$$

Получим в остатке 6, следовательно, d = НОД(6, 12). 12 делится на 6 без остатка, т. е. остаток равен 0, а d = НОД(0, 6). 6 – наибольшее число, на которое делятся и 6, и 0, вот мы и получили ответ.

Если вычислить таким способом d = НОД(17640, 54054), последовательно получим остатки от деления 1134, 630, 504 и 0, ответ $d = 126$.

Применения НОД НОД можно использовать для решения уравнений – в тех случаях, когда ответом должно быть целое число. Это так называемые диофантовы уравнения – в честь древнегреческого математика Диофанта Александрийского.

Представим, что наша двоюродная бабушка Кристин собралась в отпуск на Барбадос. Она отправляет в аэропорт своего дворецкого Джона со всеми чемоданами, и каждый из них весит либо 18, либо 84 килограмма, а ей сообщают, что суммарный вес ее багажа составляет 652 кг.

Когда дворецкий возвращается в Белгрэвию, Джеймс, девятилетний сынишка Джона, встревает со своими соображениями: дескать, быть того не может, поскольку

652 на НОД = 6 не делится. Джеймс выдвигает предположение, что суммарный вес багажа составляет, видимо, 642 килограмма.

Джеймс знает, что, что у уравнения $18x + 84y = c$ есть целочисленное решение только при условии, что c делится на НОД = 6. Для $c = 652$ не получится, а вот для 642 – вполне. Джеймсу даже не нужно знать, сколько именно было у бабули Кристин, собравшейся на Барбадос, чемоданов x и y двух разных масс.

Китайская теорема об остатках Если НОД двух чисел равен 1, их называют взаимно-простыми. Сами по себе, может, они и не простые вовсе, а просты лишь по отношению друг к другу. Например, НОД(6, 35) = 1, хотя сами по себе ни 6, ни 35 простыми числами не являются. Это понятие нам пригодится для объяснения китайской теоремы об остатках.

Возьмем такую задачу: Энгус не знает, сколько у него бутылок вина, но, составив их попарно, видит, что одна осталась без пары. Выставив их рядами по 5 в винном погребе, получает 3 в остатке. Так сколько же у Энгуса бутылок? Мы знаем, что деление на 2 дает нам остаток 1, а деление на 5 – 3. Первое условие позволяет нам исключить все четные числа. Перебрав нечетные, мы быстро обнаружим, что 13 подходит по обоим условиям (мы наверняка можем сразу сделать вывод, что бутылок у Энгуса больше 3, хоть это число и соответствует обоим условиям). Но есть и другие подходящие числа – на самом деле, их целая последовательность, начинающаяся с 13: 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, ...

Добавим еще одно условие: искомое число должно при делении на 7 давать остаток 3 (бутылки прибыли в упаковках по 7 бутылок и 3 – отдельно). Просмотрев последовательность 13, 23, 33, 43, 53, 63, ... с учетом этого нового условия, устанавливаем, что подходит 73, но отметим, что 143, 213 и все остальные числа, получающиеся путем прибавления 70, тоже соответствуют всем трем условиям.

С математической точки зрения мы нашли решения, гарантированные нам китайской теоремой об остатках, которая также утверждает, что любые два решения отличаются на $2 \times 5 \times 7 = 70$. Если у Энгуса от 150 до 250 бутылок, значит, теорема подсказывает нам один ответ – 213. Неплохой результат для теоремы, сформулированной и доказанной в III веке.

В сухом остатке: Путь к наибольшему

16 Логика

«Будь на дорогах меньше машин, загрязнение окружающей среды было бы терпимо. Либо нам надо уменьшить число машин на дорогах, либо надо брать плату за проезд, либо и то и другое разом. Если дороги у нас будут платные, лето будет несносно жарким. Лето же, как выясняется, довольно прохладное. Вывод однозначен: загрязнение окружающей среды терпимо».

Аргументация новостной статьи — «обоснованная» она или «нелогичная»? Не имеет значения, осмысленна транспортная политика или это качественная журналистская работа. Нас интересует исключительно обоснованность этого высказывания как логического построения. Логика может помочь нам ответить на этот вопрос — она занимается проверкой строгости доводов.

Две посылки, одно заключение Если разобраться, приведенный газетный абзац довольно затейлив. Давайте для начала рассмотрим что попроще и обратимся к опыту греческого философа Аристотеля Стагирита, коего считают отцом науки логики. Его подход основан на различных формах силлогизма — способа ведения спора, основанного на трех утверждениях: двух посылках и одном заключении. Например:

Все спаниели — собаки
Все собаки — животные
———————————
Все спаниели — животные

Над горизонтальной чертой располагаются посылки, а под ней — заключение. В этом примере заключение носит бесспорный характер, без всякой связи с тем, какой смысл мы вкладываем в понятия «спаниели», «собаки» и «животные». Подобный же силлогизм, но в других словах выглядит так:

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 335 до н. э.
Аристотель формализует логику силлогизма

1847
Джордж Буль публикует «Математический анализ логики»

Все яблоки — апельсины
Все апельсины — бананы

Все яблоки — бананы

В этом случае каждое отдельное высказывание — нонсенс, если мы вкладываем привычный смысл в знакомые слова. Тем не менее оба примера силлогизмов имеют одинаковую структуру, и именно эта структура сообщает силлогизму обоснованность. В пределах такой структуры невозможно измыслить пример А, В и С, для которых посылки были бы верны, а заключение — ложно. Это и делает довод полезным.

Все А суть В
Все В суть С

Все А суть С

Обоснованный довод

Существуют разные виды силлогизмов — они возникают при варьировании количественных критериев типа «все», «некоторые», «никакие» («Никакие А не В»). Например, так:

Некоторые А суть В
Некоторые В суть С

Некоторые А суть С

Обоснованный ли это довод? Применим ли он ко всем случаям А, В и С или где-то тут спрятался контрпример — случай, когда посылки верны, а заключение ложно? Предположим, А — спаниели, В — объекты коричневого цвета, а С — столы. Убедительно ли следующее рассуждение?

Некоторые спаниели — коричневого цвета
Некоторые объекты коричневого цвета — столы

Некоторые спаниели — столы

Наш контрпример показывает, что этот силлогизм *не* убедителен. Существует столько разных видов силлогизмов, что средневековые ученые даже придумывали мнемонические правила для их запоминания. Первый приведенный нами пример силлогизма известен под кодовым названием БАРБАРА, поскольку в нем трижды применяется количественный определитель «Все» (англ. *All*). Эти методы анализа доводов существовали более 2000 лет и занимали важное место в начальном обучении в средневековых университетах. Аристотелева логика — теория силлогизма — считалась совершенной наукой даже в XIX веке.

Логика высказывания Другой тип логики идет дальше силлогизмов. Он обращается с высказываниями или простыми утверждениями и их комбинациями.

1910

Бертран Расселл и Алфред Норт Уайтхед пытаются свести математику к логике

1965

Лофти Заде развивает нечеткую логику

1987

Система японского метро основана на нечеткой логике

A	b	a ∨ b
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Истина *или*

a	b	a ∧ b
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Истина *и*

a	¬ a
И	Л
Л	И

Истина *не*

a	b	a → b
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Истина *если... то*

Чтобы проанализировать газетную новость, нам потребуется владение этой самой «логикой высказывания». Когда-то ее называли «алгеброй логики», что намекает нам на ее структуру – Джордж Буль признавал, что с нею можно обращаться как с новой разновидностью алгебры. В 1840 году математиками Булем и Огастесом де Морганом в логике было проделано много работы.

Попробуем рассмотреть высказывание **a** («Фредди – спаниель»). Высказывание **a** может быть истинным или ложным. Если я имею в виду свою собаку по имени Фредди, а его порода – однозначно спаниель, то утверждение истинно (**И**), но если я имею в виду своего двоюродного брата, которого тоже зовут Фредди, то утверждение ложно (**Л**). Истинность или ложность утверждения зависит от наших соотнесений.

Возьмем другое высказывание **b**: «Этель – кошка» – и скомбинируем его с предыдущим. Таких комбинаций может быть несколько: первую можем записать как **a** ∨ **b**. Значок «∨» соответствует по смыслу «или», но его применение в логике несколько отличается от привычного нам в быту «или». В логике **a** ∨ **b** истинно, если истинно либо «Фредди – спаниель», либо «Этель – кошка», либо и то и другое, а ложно лишь в том случае, если и **a**, и **b** – ложны. Дизъюнкцию высказывания мы иллюстрируем таблицей «истина *или*».

Вот и еще возможные комбинации двух утверждений – с применением «и» (записываем так: **a** ∧ **b**) и «не» (записываем ¬ **a**). Алгебра логики становится яснее, если соединить все эти высказывания **a**, **b** и c в виде **a** ∧ (**b** ∨ c). Получится уравнение, называемое тождеством:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \vee c) \equiv (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$$

Символ ≡ означает равнозначность логических утверждений, в которой обе стороны равенства описываются одинаковыми таблицами истинности. Существует параллель между алгеброй логики и обычной алгеброй, поскольку символ ∧ и ∨ производят то же действие, что × и + в обычной алгебре: $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$. Тем не менее аналогия эта не полная, есть исключения.

В понятиях этих, простых, могут быть определены иные логические связи. Полезная логическая связь «если... то» **a** → **b**, определяемая как ¬ **a** ∨ **b**, и таблицу ее истинности мы также приводим, см. слева.

Теперь вернемся к газетной новости и запишем ее в символическом виде – проверим аргументацию на обоснованность:

М = меньше **м**ашин на дорогах
З = **з**агрязнение терпимо
П = **п**латные дороги
Ж = лето будет несносно **ж**арким

$$\begin{array}{c} \text{М} \rightarrow \text{З} \\ \text{М} \vee \text{П} \\ \text{П} \rightarrow \text{Ж} \\ \neg\,\text{Ж} \\ \hline \text{З} \end{array}$$

Так обоснованна ли эта аргументация? Допустим, заключение **З** – ложно, а все посылки – истинны. Если мы покажем, что из-за этого возникает противоречие, значит, довод обоснован. Если **З** – ложно, тогда из первой посылки **М → З** следует, что **М** – ложно. Поскольку **М ∨ П** истинно, то если **М** – ложно, то **П** – истинно. С учетом третьей посылки **П → Ж** выходит, что **Ж** – истинно, а **¬ Ж** – ложно. Однако это противоречит последней посылке **¬ Ж**, об истинности которой мы условились. Содержание газетной новости вполне спорно, однако довод структурирован обоснованно.

∨ или
∧ и
¬ не
→ если… то
∀ для всех
∃ это существует

Другие логики Готлоб Фреге, Ч. С. Пирс и Э. Шрёдер ввели количественные оценки в логику высказывания и предложили «логику первого порядка (исчисление предикатов)». Такое название эта логика получила потому, что допускает высказывания о предикатах (функциях, принимающих значения «истина» или «ложь», характеризуемых как истинные или ложные). Эта логика оперирует кванторами ∀ (квантор всеобщности, «для всех») и ∃ (квантор существования, «это существует»).

Еще одна новость – нечеткая логика. Может показаться, что речь о путаном мышлении, но на самом деле это очередное расширение границ логики. Традиционная логика основывалась на множествах или группах данных: мы оперировали множествами спаниелей, собак, объектов коричневого цвета. В этих случаях у нас нет сомнений в том, что входит в множество, а что – нет. Если нам попадется чистокровный родезийский риджбек, мы наверняка сразу поймем, что это животное точно не из множества спаниелей.

Теория нечетких множеств имеет дело с множествами, не определенными точно. Положим, у нас есть множество толстых спаниелей. Насколько толстым должен быть спаниель, чтобы мы включили его в это множество? Нечеткие множества допускают градации членства, и границы, отделяющие членов множества от всех остальных объектов, размыты. Математика позволяет нам точно определять размытость. Логика – не сушеная наука. Она пережила Аристотеля и ныне – активная область исследований и практики.

В сухом остатке: Четкая линия рассуждений

17 Доказательство

Математики стараются подтверждать свои заявления доказательствами. Поиск железных доводов — движущая сила чистой математики. Цепочки логических выводов из известного или общепринятого приводят математика к заключению, которое далее поступает на склад авторитетного математического знания.

Доказательства не даются в руки просто так — часто ими увенчиваются долгие исследования и плутания по ложным путям. Борьба за доказательство — основа жизни математика. Успешное доказательство есть знак подлинности, отличающий признанную теорему от гипотезы, гениальной идеи или первой догадки.

Обязательные свойства доказательства: строгость, прозрачность и — не в последнюю очередь — изящество. А еще стоит добавить сюда же озарение: хорошее доказательство «делает нас мудрее»; однако в любом случае лучше хоть какое-нибудь доказательство, чем совсем никакого. Развитие чего бы то ни было на основании недоказанных фактов таит в себе опасность построения теорий на математическом эквиваленте песка.

Не любое доказательство вечно — оно может быть пересмотрено в свете новых идей, возникающих в той области знания, к которой относится.

Что есть доказательство? Читая или слыша о каком-нибудь математическом результате, вы в него сразу верите? Что именно заставляет вас в него поверить? Возможный ответ: логично выстроенные доводы, ведущие вас от уже принятых вами идей к новому для вас утверждению. Это математики и называют доказательством в его традиционном виде — смесь бытового языка и строгой логики. В зависимости от качества доказательства вас либо удается убедить, либо вы остаетесь при своих сомнениях.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 300 до н. э.

«Начала» Евклида описывают модель математического доказательства

1637

В «Рассуждении о методе» Декарт развивает строгий подход в математике

В математике в основном применяются следующие методы доказательства: контрпример, прямое доказательство, доказательство от противного и математическая индукции.

Контрпример Начнем со скептицизма — этот подход хорош для доказательства неверности утверждения. Возьмем в качестве примера некоторое конкретное утверждение. Допустим, вам сообщают, что при умножении любого числа на само себя получается четное число. Вы этому верите? Прежде чем отвечать на этот вопрос, проверим на нескольких числах. Умножим, к примеру, 6 на само себя, $6 \times 6 = 36$, а 36 — конечно же, четное число. Но одна ласточка весны не делает. В утверждении шла речь *о любом* числе, а их бесконечное множество, значит, надо пробовать еще. Возьмем 9, умножим на 9, получим $9 \times 9 = 81$. Но 81 — нечетное число. А значит, утверждение о том, что умножение *любого* числа на само себя дает в результате четное число, — неверно. Этот пример работает против изначального утверждения и называется контрпримером. Контрпример к утверждению «все лебеди — белые» — увиденный черный лебедь. Одна из радостей математики — поиск контрпримера для устранения теорем-самозванцев.

Если контрпример найти не удается, может показаться, что утверждение верно. Тогда математикам приходится разыгрывать другие карты. Необходимо выстроить аргументацию, и самый лобовой метод — прямое доказательство.

Прямое доказательство В методе прямого доказательства мы применяем логические выводы из уже установленного или общепризнанного и приходим к заключению. Если нам это удается, получаем теорему. Доказать, что умножение любого числа на само себя приводит к четному числу, нам не удастся, потому что мы уже доказали обратное. Но вдруг хоть что-то можно спасти? Разница между нашим примером с 6 и контрпримером с 9 в том, что первое число — четное, а второе — нечетное. Подправить гипотезу мы всегда можем. Наше утверждение таково: если умножить любое *четное* число на само себя, в результате получится четное число.

Для начала попробуем другие численные примеры и удостоверимся, что наше утверждение всякий раз оказывается верно, а контрпример никак не находится. Если сменить тактику, какова она должна быть? С чего начать? Можно, конечно, с некоего абстрактного четного числа n, однако нагляднее будет все-таки разработать доказательство на конкретном примере — допустим, на примере 6. Как известно, четное число есть кратное двум, т. е. $6 = 2 \times 3$. Поскольку $6 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$ или, если переписать несколько иначе, $6 \times 6 = 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3$, или со скобками:

$$6 \times 6 = 2 \times (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3).$$

1838

Де Морган вводит понятие «математическая индукция»

1967

Эрретт Алберт Бишоп доказывает результативность исключительно конструктивных методов

1976

Имре Лакатос (Лакатош) публикует влиятельный математический труд «Доказательства и опровержения»

Это означает, что 6×6 кратно 2, а значит, и результат умножения – четное число. Однако в этом доводе ничто не привязано к конкретному числу 6 – мы могли бы записать, что при $n = 2 \times k$ верно:

$$n \times n = 2 \times (k + k + \ldots + k),$$

из чего заключить, что $n \times n$ – четное. Доказательство готово. В переводах Евклидовых «Начал» позднейшие математики писали QED в конце доказательства – в знак того, что дело сделано: это аббревиатура латинского «*quod erat demostrandum*» («что и требовалось показать», ч. т. д.). Ныне используется заштрихованный квадрат – ■. Этот символ называется «халмош», в честь американского математика венгерского происхождения Пола Халмоша, впервые применившего его на письме.

Доказательство от противного Применяя этот подход, мы считаем, что некоторое утверждение ложно, после чего логическими доводами демонстрируем, что такая установка противоречит исходной гипотезе. Докажем ранее достигнутый результат этим методом.

Итак, наша гипотеза состоит в том, что n – четное, а мы будем считать, что $n \times n$ – нечетное. Запишем: $n \times n = n + n + \ldots + n$, число слагаемых равно n. Это означает, что n четным быть не может (потому что в противном случае $n \times n$ было бы четным). Таким образом, n – нечетное, а это противоречит изначальному предположению. ■

Это еще легкая форма косвенного метода. В своем полновесном варианте косвенный метод известен под названием *reduction ad absurdum* (сведение к абсурду) – греки его обожали. Сократ и Платон в Афинской академии любили доказывать свою точку зрения, опутывая оппонентов сетями противоречий, и выбраться из них можно было, лишь приняв предложенную точку зрения. Классическое доказательство того, что квадратный корень из 2 есть иррациональное число, – одна из форм косвенного метода: в нем мы начинаем с предположения, что квадратный корень из 2 – действительное число, после чего приходим к противоречию с этой гипотезой.

Метод математической индукции Математическая индукция – мощный способ показать, что все члены последовательности утверждений P_1, P_2, P_3, ... истинны. Этот метод, известный к тому времени сотни лет, в 1830-х годах формализовал Огастес Де Морган. Математическую индукцию (не следует путать ее с научной индукцией) широко применяют для доказательства различных утверждений, касающихся *целых* чисел. Особенно полезен этот подход в теории графов, теории чисел и вообще в компьютерном деле. Рассмотрим в качестве практического примера задачу о сложении нечетных чисел. Допустим, складываем мы $1 + 3 + 5$, т. е. первые три нечетных числа, получаем в сумме 9; складываем первые четыре, т. е. $1 + 3 + 5 + 7$, и получаем 16. 9 – это $3 \times 3 = 3^2$, а $16 = 4 \times 4 = 4^2$. Можно ли, исходя из этих двух примеров, предположить, что первые n нечетных чисел в сумме дают n^2? Если проверить эту гипотезу на любом случайно взятом числе n, допустим — $n = 7$, мы и впрямь обнаружим, что $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$, т. е. 7^2. Но распространяется ли эта закономерность на все значения n? Можем ли мы быть в этом уверены? Ведь нет никакой возможности проверить это правило применительно к каждому числу из бесконечного множества.

И вот тут-то нам пригодится математическая индукция. Метафорически говоря, это метод домино: выстроив костяшки домино в ряд и толкнув первую, можно обрушить одну за другой все их. Это очевидно. Чтобы все они повалились, нам необходимо лишь заставить упасть первую. Применим этот подход к нашей задаче о нечетных числах. Утверждение P_n сообщает, что сумма первых n нечетных чисел есть n^2. Математическая индукция запускает цепную реакцию, в которой все P_1, P_2, P_3, ... истинны. Утверждение P_1 истинно по определению: $1 = 1^2$. Следующее, P_2, тоже верно: $1 + 3 = 1^2 + 3 = 2^2$, P_3 истинно, потому что $1 + 3 + 5 = 2^2 + 5 = 3^2$, а P_4 истинно, потому что $1 + 3 + 5 + 7 = 3^2 + 7 = 4^2$. Мы применяем результат предыдущей стадии рассуждений в следующей стадии. Формализация такого процесса и дает нам метод математической индукции.

Трудности доказательства Доказательства бывают всех мыслимых видов и размеров. Некоторые лаконичны и искрометны — особенно те, что приводятся в учебниках. Некоторые включают результаты последних исследований и занимают целые журнальные выпуски и тысячи страниц. Мало кому в таких случаях удастся постичь всю систему доводов целиком.

А есть еще и сомнения в основах: например, некоторые математики — таких, правда, немного — недолюбливают косвенный метод сведения к абсурду в случаях применения его к существованию того или иного феномена. Если гипотеза о том, что у какого-нибудь уравнения не существует решения, ведет к противоречию, означает ли это, что решение все-таки существует? Оппоненты этого метода доказательства заявили бы, что такая логика — сплошное трюкачество и ничего не сообщает нам о том, как найти это самое решение. Таких математиков называют «конструктивистами» (разных мастей) — они говорят, что этот косвенный метод не приводит к «численному значению». Они фыркают на классиков математики, считавших метод редукции главным оружием математического арсенала. С другой стороны, математики-традиционалисты считают: исключение этого метода означает, что работать придется с одной рукой, связанной за спиной, и, более того, нам придется отказаться от многих результатов, достигнутых при помощи этого метода, а без них гобелен математики будет смотреться довольно лысо.

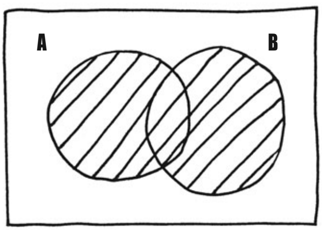
В сухом остатке: С подписью и печатью

18 Множества

Николя Бурбаки — псевдоним группы французских ученых, пожелавших «правильно» переписать математику от самого истока. Их смелое заявление состояло в том, что все должно базироваться на теории множеств. Аксиоматический подход был принят ими за основной, и все в написанных ими книгах придерживалось математической строгости «определение, теорема, доказательство». В 1960-х годах они произвели резкий рывок в математике.

Георг Кантор создал теорию множеств из желания придать теории действительных чисел осязаемый вид. Невзирая на изначальную предубежденность и критику, теория множеств на заре XX века утвердилась как целое направление в математике.

Что такое множества? Множество можно рассматривать как набор объектов. Хоть такой подход и неформален, зато дает общее представление. Сами объекты называются «элементами», или «членами», множества. Если есть множество A, а в нем — член a, можно записать $a \in A$, что Кантор и делал. Если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то можем записать $1 \in A$ и так обозначить членство в множестве и $6 \notin A$ — для элементов, не являющихся членами множества.



Объединение множеств A и B

Существуют две основные операции над множествами. Если A и B — два множества, то множество, включающее элементы A или B (или обоих), называется «объединением» двух множеств. Математики записывают это так: $A \cup B$. Графически «объединение» можно отобразить при помощи диаграммы Венна, названной в честь викторианского логика преп. Джона Венна. Еще раньше подобные диаграммы применял Эйлер.

Множество $A \cap B$ состоит из элементов, входящих одновременно и в множество A, и в множество B, и называется «пересечением» двух множеств.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

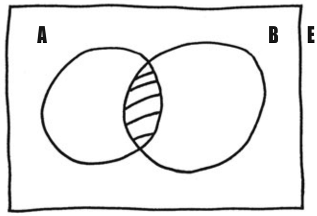
1872

Кантор делает робкие шаги в создании теории множеств

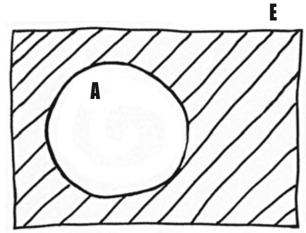
1881

Венн внедряет диаграммы, названные его именем, для описания множеств

Если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $B = \{1, 3, 5, 7, 10, 21\}$, объединение этих двух множеств есть $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 21\}$, а пересечение — $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. Если рассматривать A как часть всеобщего множества E, то дополнение $\neg A$ состоит из элементов множества E, не входящих в A.



Пересечение множеств *A* и *B*



Дополнение множества *A*

Операции $\cap$ и $\cup$ над множествами аналогичны умножению и сложению в алгебре. Вместе с разностью $\neg$ они образуют «алгебру множеств». Британский математик, шотландец, родившийся в Индии, Огастес Де Морган, сформулировал законы, по которым осуществляются эти операции. В современном описании законы Де Моргана выглядят так:

$$\neg (A \cup B) = (\neg A) \cap (\neg B)$$

и

$$\neg (A \cap B) = (\neg A) \cup (\neg B).$$

Парадоксы С конечными множествами никаких проблем нет, потому что можно записать все их члены, как, например, для $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, но во времена Кантора именно бесконечные множества вызывали наибольшие затруднения.

Кантор определял множества как наборы элементов с особым свойством. Представьте множество $\{11, 12, 13, 14, 15, \ldots\}$, т. е. все целые числа больше 10. Поскольку это множество бесконечно, мы не можем записать все его элементы, но все-таки можем его определить, потому что у всех его членов есть общее свойство. Следуя логике Кантора, мы можем записать множество $A = \{x\text{: } x \text{ целое число} > 10\}$, где двоеточие означает «такой, что».

В простой версии теории чисел могут существовать множества абстрактных объектов, $A = \{x\text{: } x \text{ — абстрактный объект}\}$. В этом случае A само по себе — абстрактный объект, поэтому может быть верно $A \in A$. Однако такое допущение создает серьезные трудности. Британский философ Бертран Расселл сформулировал концепцию множества S, включающего в себя *все* множества, которые *не включают* самих себя. Символически это записывается так: $S = \{x\text{: } x \notin x\}$.

Далее Расселл задает вопрос: $S \in S$ — верно ли это? Если да, то S в таком случае должно удовлетворять утверждению о том, что само оно не содержит себя, т. е. $S \notin S$.

1931

Курт Фридрих Гёдель доказывает, что любая формальная математическая аксиоматика содержит невыводимые утверждения

1939

Французскими математиками впервые используется псевдоним «Бурбаки»

1964

Пол Джозеф Коэн доказывает независимость континуум-гипотезы

С другой стороны, если нет, то $S \notin S$, а значит, S не соответствует определяющему утверждению $S = \{x: x \notin x\}$, а значит $S \in S$. Суть парадокса Расселла сводится к следующему:

$$S \in S \text{ тогда и только тогда, когда } S \notin S.$$

У этого парадокса есть и другое название — «парадокс брадобрея»: сельский брадобрей объявляет, что будет брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто бреется сам. Вопрос: кто побреет брадобрея? Если он сам не бреется, то должен брить сам себя, а если бреется сам, то не должен себя брить.

Подобных парадоксов, вежливо называемых «антиномиями», следует избегать. Для математиков недопустимо иметь дело с системами, производящими противоречия. Расселл развил теорию типов и в ней создал позволение $a \in A$ лишь при условии, что a — объект низшего по отношению к A порядка, тогда удастся избежать выражений вроде $S \in S$.

Еще один способ обходить подобные антиномии — формализовать теорию множеств. При таком подходе нас не касается природа множеств как таковых, но мы формулируем набор аксиом-правил обращения с множествами. Греки попытались проделать нечто подобное — им не приходилось объяснять, что такое прямые линии, а лишь то, как именно с ними обращаться.

В случае теории множеств базовыми стали аксиомы Цермело—Френкеля — они-то и не позволили появиться «слишком большим» множествам, в том числе и таким опасным сущностям, как множество всех множеств.

Теорема Гёделя Австрийский математик Курт Гёдель нокаутировал желающих удрать от парадоксов в формальные аксиоматические системы. В 1931 году Гёдель доказал, что даже в простейших формальных системах существуют утверждения, истинность или ложность которых не может быть выведена в рамках данной системы. Попросту говоря, существуют утверждения, до которых аксиомы данной системы не могут добраться, т. е. невыводимые утверждения. Поэтому теорема Гёделя и называется «теоремой о неполноте». Этот вывод применим к системе Цермело—Френкеля, а также и к другим.

Кардинальные числа Число элементов конечного множества легко подсчитать, например, в $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ пять элементов; можем сказать, что «мощность» этого множества — 5, и записать так $card(A) = 5$. Грубо говоря, мощность множества определяет его «размеры».

Согласно канторовой теории множеств, множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$ и действительных чисел $\mathbf{R}$ сильно различаются. Множество $\mathbf{Q}$ можно записать, а множество $\mathbf{R}$ — нет (см. стр. 31).

Хоть оба множества и бесконечны, у множества **R** более высокий ранг бесконечности, чем у **Q**. Математики обозначают *card*(Q) буквой ивритского алфавита «алеф» с индексом «нуль» — $\aleph_0$, а *card*(R) = c. Это означает, что $\aleph_0 < c$.

Континуум-гипотеза Примерно в 1878 году Кантор предложил континуум-гипотезу, сводившуюся к тому, что следующий уровень бесконечности после бесконечности **Q** есть бесконечность действительных чисел c. Иными словами, континуум-гипотеза предполагала, что нет такого множества, значение мощности которого размещается строго между $\aleph_0$ и с. Кантор упорно возился с ней и, хоть и верил в ее истинность, доказать не смог. Опровергнуть это утверждение равносильно обнаружению подмножества X множества **R** с $\aleph_0 < card(X) < c$, но и это ему не удалось.

Задача эта оказалась настолько важна, что немецкий математик Давид Гильберт (Хилберт) поместил ее во главе списка 23 ключевых проблем математики грядущего века, представленных на Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году.

Гёдель пылко верил, что эта гипотеза ложна, однако доказать этого не сумел. Он, правда, доказал (в 1938 году), что гипотеза Кантора согласуется с системой аксиом Цермело—Френкеля для теории множеств. Это равносильно логической связи между существованием аксиом и отрицанием гипотезы. Учтя результат Гёделя 1938 года, Коэн показал, что континуум-гипотеза не зависит от прочих аксиом в теории множеств.

Сходное положение дел, по сути, и в части аксиомы параллельности Евклида (см. стр. 108) — эта аксиома независима от других постулатов Евклида. Открытие этой независимости привело к расцвету неевклидовой геометрии, которая, среди прочего, определила развитие теории относительности Эйнштейна. Аналогично и континуум-гипотеза может быть принята или отвергнута без всякого ущерба для других аксиом теории множеств. После совершенного Коэном прорыва открылось новое поле изучения, которое привлекло целые поколения математиков, применявших его методы доказательства независимости континуум-гипотезы.

В сухом остатке: Многие как единое

19 Исчисление

Исчисление — способ произведения расчетов, и математики иногда поминают «логическое исчисление», «вероятностное исчисление» и т. п. Но все соглашаются с тем, что все это есть Исчисление, и произносят его с большой буквы «И».

Исчисление – центральный принцип математики. Мало кто из ученых, инженеров или экономистов не сталкивался с исчислением, столь широки его области применения. Исторически его ассоциируют с Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем, произведшими в XVII веке первые изыскания в математическом анализе. У обоих возникли похожие теории, и даже случился спор, кому принадлежит право первопроходца математического анализа. На самом деле оба ученых пришли к своим выводам независимо друг от друга, и методы их довольно сильно различались.

С тех пор масштабы знания исчисления развились необычайно. Каждое поколение вбрасывает в него новые методики, которые, по их мнению, достойны изучения потомками, и в наше время учебники по матанализу составляют тысячи страниц и имеют кучу приложений. Среди всех нововведений совершенно необходимыми являются *дифференциальное* и *интегральное* исчисления, двуглавая вершина математического анализа Ньютона и Лейбница. Эти два термина происходят от Лейбницевых *differentialis* (различение, или «разъятие на части») и *integralis* (сумма частей, или «сведение воедино»).

Технически говоря, дифференцирование связано с измерением *изменения*, а интегрирование – с измерением *площади*, но жемчужина в короне матанализа есть факт их единства: они суть две стороны одной медали, обратные друг другу. Математический анализ – единый предмет, и необходимо знать обе эти стороны. Неудивительно, что «образцовый генерал-майор» Гилберта и Салливена в оперетте «Пираты Пензанса» (1879) воспел эти два открытия:

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 450 до н. э.

Зенон предлагает парадокс, в котором высмеивает бесконечно малые величины

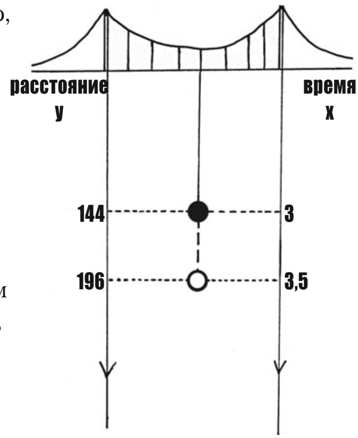
1660–1670-е

Ньютон и Лейбниц делают первые шаги в математическом анализе

Занятных фактов много про квадрат гипотенузы.
Дифференциал и интеграл – мои друзья и музы.

Дифференцирование Ученые обожают проводить «мысленные эксперименты»; особенно их любил Эйнштейн. Вообразите, что мы стоим на мосту над глубоким ущельем и собираемся бросить вниз камень. Что произойдет? Преимущество мысленного эксперимента в том, что нам необязательно лично присутствовать на месте. А еще можно совершать невозможное: например, останавливать камень посреди падения или смотреть на его полет в замедленном движении, через короткие промежутки времени.

Согласно Ньютоновой теории всемирного тяготения, камень упадет. Ничего поразительного в этом нет – камень притягивается к земле и будет падать все быстрее, покуда мы замеряем время его падения с секундомером. И тут нам очень кстати придется еще одно преимущество мысленного эксперимента: возможность не морочить себе голову всякими тонкостями вроде сопротивления воздуха.



Какова скорость камня в каждый момент времени – например, через 3 секунды после того, как мы выпустим его из рук? Как нам это выяснить? Разумеется, можно измерить *среднюю* скорость, но наша задача – измерить скорость *мгновенную*. Поскольку это мысленный эксперимент, отчего бы нам не остановить камень в полете, после чего дать ему пролететь еще чуть-чуть – буквально долю секунды? Если разделить это краткое расстояние на выделенное нами краткое время, получится средняя скорость в очень кратком интервале времени. Если сокращать эти временные интервалы, мы будем все больше приближаться к мгновенной скорости в той точке, где впервые остановили полет камня – мысленно. Эта идея с предельным сокращением отрезка и есть база матанализа.

Может возникнуть искушение сделать этот самый интервал времени равным нулю. Но в нашем мысленном эксперименте камень в таком случае не двигается с места – не проходит никакого расстояния и не тратит на это, соответственно, нисколько времени! В результате мы получим среднюю скорость 0/0, чему ирландский философ епископ Джордж Беркли дал знаменитое описание «призраки усопших величин». Это выражение невозможно определить – оно по сути *бессмысленно*. На этом пути мы попадаем в цифровую топь.

1734
Джордж Беркли обращает внимание на уязвимые места в базе матанализа

1820-е
Огюстен Коши строго формализует теорию

1854
Георг Риман (Риманн) вводит интеграл, впоследствии получивший его имя

1902
Анри Лебег разрабатывает теорию интеграла, впоследствии названного его именем

Чтобы рассуждать далее, нам понадобятся дополнительные символы. Точная формула, соединяющая пройденный камнем путь y и время x, потребное для прохождения этого пути, была предложена Галилео Галилеем:

$$y = 16 \times x^2.$$

Коэффициент 16 возникает потому, что измерения проводятся в футах и секундах. Чтобы посчитать, сколько камень пролетел за 3 секунды, нужно подставить 3 вместо x в приведенную формулу и вычислить ответ $y = 16 \times 3^2 = 144$ фута. Но как нам вычислить скорость камня в момент времени $x = 3$?

Добавим еще 0,5 секунды и посмотрим, сколько пролетит камень в промежутке между 3 и 3,5 секундами. За 3,5 секунды камень пролетел $y = 16 \times 3{,}5^2 = 196$ футов, а значит, между 3 и 3,5 секунды он упал на 196 – 144 = 52 фута. Поскольку скорость есть расстояние, деленное на время, средняя скорость в этом промежутке времени 52/0,5 = 104 фута в секунду. Это уже близко к мгновенной скорости при $x = 3$, но можно возразить, что 0,5 секунды — недостаточно малый промежуток времени. Повторим то же рассуждение с меньшим промежутком времени — допустим, с 0,05 секунды, и тогда расстояние получится 148,84 – 144 = 4,84 фута, а средняя скорость — 4,84/0,05 = 96,8 фута в секунду. Это, конечно, еще ближе к мгновенной скорости в момент полета через 3 секунды после его начала (когда $x = 3$).

А теперь возьмем быка за рога и подступимся к задаче расчета средней скорости камня между точками во времени x и немного погодя: $x + h$. Слегка повозившись с символами, получим:

$$16 \times (2x) + 16 \times h.$$

u	du/dx
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$
...	...
x^n	nx^{n-1}

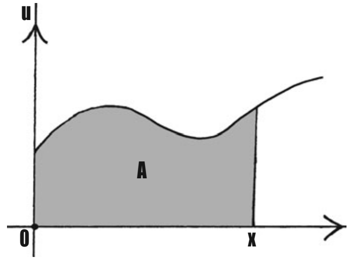
Все уменьшая и уменьшая h, как мы уже проделали, сократив промежуток времени полета камня с 0,5 до 0,05, увидим, что первая часть суммы не меняется (потому что в нее не входит h), а вторая становится все меньше. Заключим:

$$v = 16 \times (2x),$$

где v — мгновенная скорость камня в момент x. Например, мгновенная скорость камня через 1 секунду (когда $x = 1$) есть $16 \times (2 \times 1) = 32$ фута в секунду; через 3 секунды — $16 \times (2 \times 3)$, т. е. 96 футов в секунду.

Если сравнить Галилееву формулу $y = 16 \times x^2$ с формулой скорости $v = 16 \times (2x)$, разница — в замене x^2 на $2x$. Таков эффект дифференцирования — переход от $u = x^2$ к *производной* $\dot{u} = 2x$. Ньютон называл $\dot{u} = 2x$ «флюксией», а переменную x — флюентой, потому что мыслил в терминах текучих материй. Ныне мы часто записываем функцию $u = x^2$, а ее *производную* как $du/dx = 2x$. Такая запись была предложена Лейбницем и сохранилась в этом виде, утвердив превосходство *«d»*-изма над точками Ньютона.

Падающий камень мы взяли в качестве примера, но если бы u выражала что-нибудь другое, мы бы все равно могли посчитать производную, а это полезно и в других контекстах. Просматривается закономерность: производная получается умножением на степень исходной функции и уменьшением степени исходной функции на единицу (если функция – многочлен).



Интегрирование Исторически первое применение интегрирования – измерение площадей. Измерение площади поверхности под кривой можно произвести аппроксимированием ее прямоугольными фрагментами, каждый из которых имеет ширину dx. Измеряя площадь каждого такого прямоугольника и складывая их вместе, получим «сумму» их площадей, которая и равна общей площади. Символ S обозначает сумму и был введен Лейбницем в вытянутом виде – $\int$. Площадь каждого прямоугольника равна udx, и тогда площадь A под кривой от 0 до x:

$$A = \int_0^x u\,dx.$$

Если имеем кривую $u = x^2$, площадь под ней рассчитывается путем вычерчивания узких прямоугольников под кривой, сложением их вместе и расчетом приблизительной получающейся площади. Если предельно сократить ширину этих прямоугольников, можно получить точную площадь под кривой. Ответ выходит такой:

$$A = x^3/3.$$

u	$\int_0^x u\,dx$
x^2	$x^3/3$
x^3	$x^4/4$
x^4	$x^5/5$
x^5	$x^6/6$
...	...
x^n	$x^{n+1}/(n+1)$

Мы можем вычислить интеграл и для разных кривых (и других выражений для u). Как и в случае с производными, у интегральных функций есть закономерности степеней x. Интегральная функция получается делением переменной, возведенной в степень исходной функции, увеличенной на единицу, на показатель исходной функции, также увеличенный на единицу.

Коронный номер Если дифференцировать интеграл $A = x^3/3$, получим исходное $u = x^2$. Если интегрировать производную $du/dx = 2x$, тоже получим исходное $u = x^2$. Дифференцирование обратно интегрированию, и это наблюдение известно как основная теорема математического анализа* и является одной из важнейших в математике вообще.

* Теорема Ньютона—Лейбница.

Без матанализа не летали бы спутники по орбите, не было бы экономической теории, а статистика выглядела бы совершенно иначе. Где бы ни возникали изменения, там везде есть математический анализ.

В сухом остатке: Доходим до предела

20 Построения

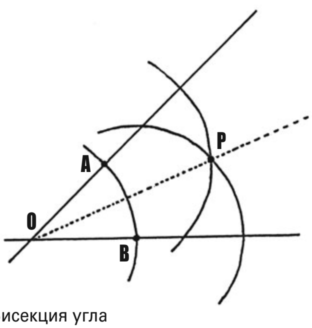
Доказательство невозможности зачастую трудная штука, но некоторые величайшие математические победы состоят как раз в таких доказательствах — что-то не может быть осуществлено. Невозможно построить квадратуру круга, но как это доказать?

Перед древними греками стояло четыре задачи на построение:

- трисекция угла (деление угла на три равных меньших угла);
- удвоение куба (построение второго куба, объем которого в два раза больше исходного);
- квадратура круга (построение квадрата, равного определенному кругу по площади);
- построение многоугольников (правильных фигур, у которых все стороны равны между собой, а все углы одинаковые).

Для решения этих задач они применяли самые простые приборы:

- линейку для проведения прямых линий (и уж точно не для измерения длин);
- циркуль для рисования окружностей.



Бисекция угла

Если нравится скалолазание без веревок, кислорода, мобильных телефонов и иной дребедени, вам такие задачки, безусловно, придутся по вкусу. Без современного измерительного оборудования, необходимого для подтверждения выводов, математические методы решения таких задач были крайне затейливы, и классические античные построения были осуществлены лишь в XIX веке – при помощи современного анализа и абстрактной алгебры.

Трисекция угла Есть способ разделить угол на два меньших и равных друг другу – осуществить бисекцию угла.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 450 до н. э.
Анаксагор, сидя в тюрьме, пытается построить квадратуру круга

1672
Георг Мор показывает, что все евклидовы построения можно произвести при помощи одного циркуля

Поместите иглу циркуля в точку O, отметьте точки A и B на расстоянии радиуса, получив отрезки OA и OB. Перенесите иглу циркуля в точку A, нарисуйте фрагмент окружности. Проделайте то же самое из точки B.

Обозначьте точку пересечения двух фрагментов окружностей как P, соедините по линейке точки O и P. Треугольники AOP и BOP идентичны, а значит, углы $A\hat{O}P$ и $B\hat{O}P$ тоже равны. Линия OP – искомая биссектриса, делящая угол на две равные части.

Можем ли мы применить тот же порядок действий для деления произвольного угла на *три* равные части? В этом и состоит задача трисекции угла.

Угол в 90° – прямой – проблемы не составляет, поскольку угол в 30° построить можно. А вот если взять угол в 60°, разделить его на три части не удастся. Ответ-то мы знаем – 20°, но не существует способа построить такое рассечение при помощи линейки и циркуля. Итак:

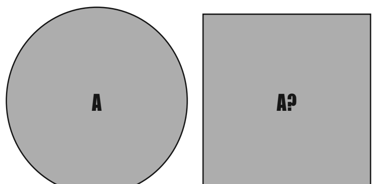
– можно провести биссектрису *любого* угла, *всегда*;
– можно произвести трисекцию *некоторых* углов, *всегда*, но
– нельзя произвести трисекцию *некоторых* углов, *ни при каких* обстоятельствах.

Удвоение куба – сходная задача, известная под названием «делосской». Ее история такова: на острове Делос разразилась чума, и жители обратились к оракулу за советом. Оракул велел им построить новый алтарь – по объему в два раза больше существующего.

Вообразим Делосский алтарь в виде трехмерного куба со всеми сторонами, равными по длине, скажем, a. Жителям необходимо было построить другой куб, со сторонами, равными b, так, чтобы он получился вдвое большего объема, чем исходный. Объем первого куба a^3, объем второго – b^3, и они связаны уравнением $b^3 = 2a^3$, или $b = \sqrt[3]{2} \times a$, где $\sqrt[3]{2}$ есть число, которое при умножении на себя трижды дает 2 (таков смысл кубического корня). Если сторона исходного куба $a = 1$, уроженцам Делоса необходимо было отмерить $\sqrt[3]{2}$. К несчастью для делосцев, отложить такой отрезок исключительно с помощью линейки и циркуля невозможно, какой бы блестящий ум к этому ни был приложен.

Квадратура круга Эта задача несколько отличается от предыдущих и едва ли не самая знаменитая из всех задач на построение:

Построить квадрат, равный по площади некоторому заданному кругу.



Квадратура круга

1801

Карл Фридрих Гаусс издает «Труды по теории чисел», включая раздел о построении 17-угольника при помощи линейки и циркуля

1837

Пьер Ванцель доказывает, что классические задачи удвоения куба и трисекции угла не могут быть решены при помощи линейки и циркуля

1882

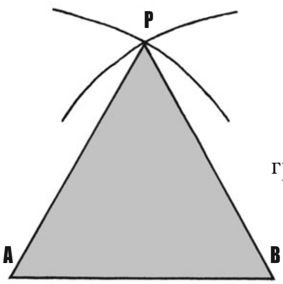
Фердинанд фон Линдеманн доказывает невозможность квадратуры круга

Фраза «искать квадратуру круга» – идиома для обозначения недостижимого. Алгебраическое уравнение $x^2 - 2 = 0$ имеет два частных решения: $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$. Это иррациональные числа (т. е. их нельзя записать в виде дроби), однако доказательство, что квадратура круга неосуществима, равносильно доказательству того, что π не может быть решением *никакого* алгебраического уравнения. Иррациональные числа с этим свойством называются «трансцендентными», потому что их уровень иррациональности «выше», чем у их иррационального двоюродного родственника $\sqrt{2}$.

Математики вообще верили, что π – трансцендентное число, но эту «загадку веков» удалось решить, т. е. строго доказать, лишь Фердинанду фон Линдеманну – с помощью методики, предложенной Шарлем Эрмитом. Эрмит применил ее для решения задачи попроще – доказывая, что основание натурального логарифма, e, есть трансцендентное число (см. стр. 26).

Казалось бы, результат Линдеманна должен был остановить навсегда поток научных работ неутомимых искателей квадратуры круга. Ан нет, нисколько. По-прежнему в кулуарах математики есть и те, кто отказывается принять доводы произведенного доказательства, и те, кто о нем даже не слыхал.

Построение многоугольников Евклид поставил задачу о построении правильного многоугольника. Это симметричная многосторонняя фигура вроде квадрата или пятиугольника, у которой все стороны равной длины, а соседние образуют равные углы. В знаменитых «Началах», книга IV, Евклид показал, как при помощи двух простейших приборов строить многоугольники с 3, 4, 5 и 6 сторонами.



Построение равностороннего треугольника

Многоугольник с 3 сторонами, который мы обычно называем равносторонним треугольником, построить проще всего. Какой бы громадный треугольник вам ни был нужен, отметьте точки A и B, а расстояние между ними устанавливайте какое пожелаете. Поместите иглу циркуля в точку A и нарисуйте фрагмент окружности с радиусом AB. Повторите ту же процедуру из точки B. Пересечение этих двух дуг обозначим буквой P. Поскольку $AP = AB$ и $BP = AB$, все три стороны треугольника ABP равны друг другу. Соединим точки отрезкам AB, AP и BP по линейке и получим искомый треугольник.

Линейка представляется вам излишней роскошью? Вы не одиноки – в XVII веке датчанину Георгу Мору тоже так казалось. Равносторонний треугольник получается нахождением точки P, а для этого нужен лишь циркуль – линейку мы применили, чтобы *физически* соединить точки. Мор доказал, что для построения, возможного при помощи циркуля и линейки, достаточно одного циркуля.

Итальянец Лоренцо Маскерони показал то же самое 125 годами позже. Новшество его доказательства заключалось в том, что в своей книге 1797 года *«Geometria del Compasso»* (ит. «Геометрия циркуля»), посвященной Наполеону, он записал его в стихах.

Рождение короля

Карл Фридрих Гаусс настолько впечатлился доказанной им возможностью построения 17-угольника, что решил отложить запланированное им изучение языков и стал математиком. Остальное мы знаем: Гаусс стал «королем математики». Мемориал в немецком Гёттингене, посвященный Гауссу, имеет форму 17-стороннего многоугольника — достойное воздание по заслугам гению этого ученого.

Особенно важно решение этой задачи в общем виде, т. е. для многоугольников с количеством сторон p, где p — натуральное число. Мы уже построили трехсторонний многоугольник, а Евклид смог изобразить пятисторонний, однако семиугольник (гептагон) ему не дался. В свои 17 лет человек по имени Карл Фридрих Гаусс доказал, что такое построение невозможно. Он также заключил, что невозможно построение правильных p-угольников для $p = 7$, 11 и 13.

Зато Гауссу удалось показать, что 17-сторонний многоугольник построить можно, но он и на этом не остановился: выкладки Гаусса демонстрируют, что p-угольник можно построить тогда и только тогда, когда p есть простое (неделимое) число, соответствующее формуле

$$p = 2^{2^n} + 1.$$

Числа такого вида называются числами Ферма. Если подставить вместо n 0, 1, 2, 3 и 4, получим простые числа $p = 3$, 5, 17, 257 и 65 537, что соответствует p-угольникам, которые можно построить.

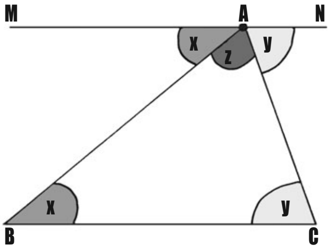
Если попробовать подставить вместо n 5, число Ферма равно $p = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$. Пьер Ферма предположил, что все числа будут простыми, однако, увы, $4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$, т. е. это число — не простое. Если $n = 6$ или 7, по формуле получатся огромные числа Ферма, но, как и в случае с $n = 5$, — не простые.

А есть ли среди чисел Ферма другие простые? Общепринято считать, что нет, но наверняка никто не знает.

В сухом остатке: Возьмем линейку и циркуль...

21 Треугольники

Самый очевидный факт о треугольнике: это фигура с тремя сторонами и тремя углами. Тригонометрия — теория, применяемая нами для «измерения треугольников», будь то его углы, длины сторон или площадь. Эта фигура — одна из простейших вообще — предмет неиссякаемого интереса.



История треугольника Существует аккуратное доказательство того, что сумма всех углов в треугольнике равна двум прямым, или 180° — проведением прямой *MAN* через вершину *A*, параллельной основанию *BC*.

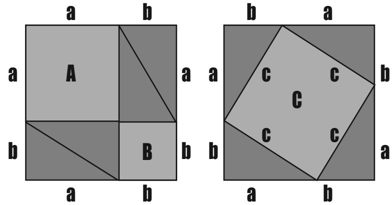
Угол $A\hat{B}C$, который мы будем называть *x*, равен углу $B\hat{A}M$, поскольку это внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых *MN* и *BC*. Два других противолежащих угла назовем *y*. Общий угол у вершины *A* равен 180° (половине от 360°), а это сумма $x + y + z$, и она также равна сумме углов в треугольнике. *QED*, как писали некогда в конце успешного доказательства. Разумеется, мы исходим из того, что треугольник изображен на плоской поверхности вроде вот этой страницы. Углы треугольника, начерченного на шаре (сферический треугольник), в сумме дадут не 180°, но это уже другая история.

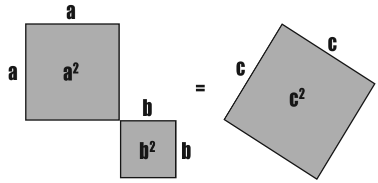
Евклид доказал множество теорем о треугольниках, всегда двигаясь от общего к частному. Он, например, продемонстрировал, что «в любом треугольнике сумма двух любых сторон всегда больше третьей». Ныне это утверждение называется «неравенством треугольника», и оно крайне важно для абстрактной математики. Эпикурейцы с их приземленным подходом к жизни заявляли, что это утверждение не нуждается в доказательстве, поскольку очевидно любому ослу. Если разместить стог сена в одной вершине треугольника, а осла — в другой, говорили они, осел, желая утолить голод, вряд ли двинется вдоль двух сторон.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1850 до н. э.
Вавилонянам известна «теорема Пифагора»

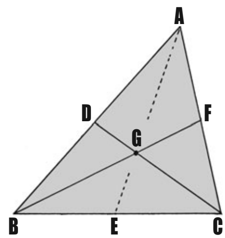
1335
Ричард Уоллингфордский пишет революционный трактат по тригонометрии





Теорема Пифагора Величайшей теоремой о треугольниках является, конечно, теорема Пифагора – она по-прежнему существует под этим названием в современной математике, хотя есть некоторые сомнения, что именно Пифагор первым сделал это открытие.

Самая известная формулировка этой теоремы в алгебраических терминах такова: $a^2 + b^2 = c^2$, однако Евклид описывает реальные геометрические формы: «В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, противолежащей прямому углу, равен сумме квадратов двух других сторон, прилежащих к прямому углу».



Доказательство Евклида – предложение 47 в книге I «Начал» – источник мучений целых поколений школьников, пытавшихся либо вызубрить его, либо жить с последствиями короткой памяти. Существуют сотни доказательств этой теоремы. Вариант в духе Бхаскары II (XII век) популярнее Евклидова (300 до н. э.).

Это доказательство – «без слов». На рисунке квадрат со стороной $a + b$ можно разделить двумя способами.

Поскольку четыре равных треугольника (выделены темно-серым) одинаковы в обоих квадратах, их можно изъять без изменения оставшихся площадей. Взглянем на площади оставшихся фигур – увидим знакомое выражение:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Прямая Эйлера Существуют сотни теорем, связанных с треугольниками. Во-первых, давайте рассмотрим середины сторон треугольника. В произвольном треугольнике ABC отметим середины сторон D, E и F. Соединим B с F, а C с D, назовем точку пересечения этих отрезков G. Теперь соединим A и E. Пройдет ли эта линия через точку G? Вообще-то без дополнительного доказательства это не очевидно. На самом деле действительно пройдет, а точка G называется «центроидом». Это центр тяжести треугольника.

У треугольника есть сотни – без преувеличения – всяких «центров». Например, точка H, в которой пересекаются высоты треугольника (линии, проводимые из вершины перпендикулярно к противолежащему основанию, – они показаны пунктиром на рисунке, стр. 86). Эта точка называется «ортоцентр». А есть еще «инцентр» O,

1571

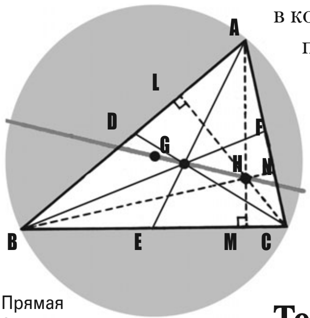
Франсуа Виет публикует книгу по тригонометрии и тригонометрические таблицы

1822

Карл Фейербах формулирует теорему об окружности девяти точек в треугольнике

1873

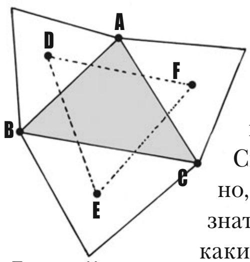
Анри Брокар издает исчерпывающий труд о треугольнике



Прямая Эйлера

в котором пересекаются линии *D*, *E* и *F* (называемые «серединными перпендикулярами», на рисунке они не показаны). Это центр окружности, проведенной через точки *A*, *B* и *C*.

Скажем даже больше. В *любом* треугольнике *ABC* центры *G*, *H* и *O* – т. е. центроид, ортоцентр и инцентр – лежат на одной линии, называемой *«прямая Эйлера»*. В случае с равносторонним треугольником (у которого все стороны одной длины) эти три точки совпадают в одной, и она однозначно есть самый что ни на есть центр треугольника.



Теорема Наполеона

Теорема Наполеона На сторонах любого треугольника *ABC* можно построить равносторонние треугольники, и треугольник *DEF*, образованный центрами этих равносторонних треугольников, тоже получится *равносторонним*. Это утверждение – теорема Наполеона.

Теорема Наполеона была опубликована в одном английском журнале в 1825 году, через четыре года после смерти императора на острове Св. Елены. Еще школьная склонность Наполеона к математике, бесспорно, помогла ему поступить в артиллерийскую школу, а позднее ему довелось знаться с выдающимися парижскими математиками. К сожалению, нет никаких доводов в пользу авторства этой теоремы – кроме ее названия, как и в случае многих других математических результатов, приписываемых имевшим малое отношение к формулировке или доказательству того или иного математического открытия. Разумеется, теорему Наполеона не раз переоткрывали и дополняли.

Ключевые сведения, определяющие треугольник, – длина любой одной стороны и размер двух углов. Тригонометрия позволяет нам измерить все остальное.

При составлении топографических карт полезно считать, что земля и треугольники на ней – плоские. Система треугольников составляется от базовой линии *BC* заданной длины путем назначения удаленной точки *A* (тригонометрический пункт) и измерения теодолитом углов $A\hat{B}C$ и $A\hat{C}B$. Тригонометрически можно узнать все о треугольнике *ABC*, и топограф двигается дальше, назначает следующий тригонометрический пункт с новым основанием *AB* или *AC*, а затем повторяет операцию, создавая сеть треугольников. У этого метода есть преимущество: с его помощью можно картографировать сложные пересеченные местности с болотами, топями, зыбучим песками или реками.

Этот подход стал основой Великого тригонометрического исследования Индии, начавшегося в 1800-х годах и длившегося 40 лет. Была поставлена задача исследовать и нанести на карты территории вдоль большой дуги меридиана от мыса Коморин на юге и до Гималаев на севере – 1500 миль. Чтобы добиться максимальной точности измерения углов, сэр Джордж Эверест организовал в Лондоне производство двух громадных

Строим из треугольников

Треугольник незаменим в строительстве. Универсальность его применения основана на том же свойстве, что сделало его основой топографии: треугольник — жесткая конструкция. Квадрат или прямоугольник можно исказить, а треугольник — нет. Строительные фермы — соединение треугольников. Один из конструкционных прорывов на базе треугольников — мосты. По сравнению с собственным весом ферма Уоррена выдерживает значительные нагрузки. Ее запатентовал Джеймс Уоррен в 1848 году, а первый мост с такими фермами был построен на станции «Лондон-Бридж» двумя годами позже. Система равносторонних треугольников оказалась надежнее сходных конструкций на основе равнобедренных треугольников, у которых только две стороны одинаковы по длине.

Балочный мост Уоррена

теодолитов, которые весили тонну и требовали десятка человек для транспортировки, – таковы были необходимые условия для получения правильных результатов.

Викторианцам пришлось обходиться без спутниковой навигации, хотя компьютеры у них были – человеческие. Когда все длины сторон в очередном треугольнике измерены, расчет его площади – задача простая. Напомним: треугольник – единица измерения. Существует несколько формул измерения площади треугольника *A*, однако самая примечательная – формула Герона Александрийского:

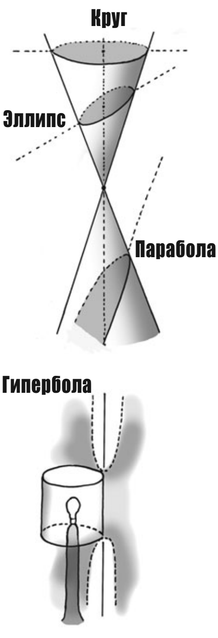
$$A = \sqrt{s \times (s - a) \times (s - b) \times (s - c)}.$$

Она применима к любому треугольнику, и мы можем ничего не знать о его углах. Символ s – половина периметра треугольника со сторонами a, b и с. Например, если стороны треугольника равны 13, 14 и 15, его периметр – 13 + 14 + 15 = 42, следовательно, $s = 21$. Произведя вычисления, получим $A = \sqrt{(21 \times 8 \times 7 \times 6)} = \sqrt{7056} = 84$. Треугольник – знакомый объект, известный и детям, играющим с простыми фигурами, и исследователям, ежедневно имеющим дело с неравенством треугольника в абстрактной математике. Тригонометрия – система обсчитывания треугольников, а косинусные, синусные и тангенциальные функции – способы их описания, позволяющие нам производить практические расчеты. Треугольнику всегда уделяли много внимания, но еще невесть сколько всяких открытий о трех линиях, образующих примитивную фигуру, ждет своего часа.

В сухом остатке: Три стороны одной истории

22 Кривые

Нарисовать кривую проще простого. Художники только это и делают; архитекторы проектируют новые кварталы или современные улицы в форме полумесяца. Бейсболист-питчер осуществляет крученую подачу. Спортсмены устремляются в зону ворот по кривой, а когда забивают гол, мяч описывает кривую. Но если попытаться ответить на вопрос «Что такое кривая?», ответ окажется неочевиден.



Конические сечения

Математики веками изучали кривые – с самых разных точек зрения. Все началось с древних греков, и кривые, которым они уделили внимание, называются «классическими».

Классические кривые Первое семейство классических кривых – так называемые «конические сечения». Члены этого семейства – круг, эллипс, парабола и гипербола. Если взять двойной конус – два рожка мороженого, соединенные так, чтобы один оказался перевернутым, – и рассечь его плоскостью, на пересечении двойного конуса и плоскости получатся конические сечения круг, эллипс, парабола или гипербола, в зависимости от того, как наклонена секущая поверхность по отношению к вертикальной оси конуса.

Коническое сечение также можно представить как проекцию круга на экран. Лучи от лампочки, размещенной в цилиндрическом абажуре, образуют двойной конус света, проецирующийся от верхнего и нижнего краев абажура. Проекция на потолке будет иметь форму круга, но если лампу слегка наклонить, круг превратится в эллипс. На стене при этом мы увидим двухчастную кривую – гиперболу.

Еще конические сечения можно представить как траектории, описываемые точками на поверхности.

Метод «траектории» был особенно любим греками и, в отличие от проекционного метода, связан с длинами. Если точка движется

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

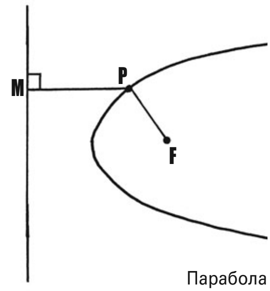
Около 300 до н. э.
Евклид описывает конические сечения

Около 250 до н. э.
Архимед исследует спирали

Около 225 до н. э.
Аполлоний Пергский публикует 8-томный труд «Начала конических сечений»

таким образом, что расстояние от *одной* зафиксированной точки всегда одно и то же, получаем круг. Если же точка перемещается так, что сумма расстояний до *двух* зафиксированных точек (фокусов) постоянна, получаем эллипс (если фокусы совпадают, эллипс становится кругом). Эллипс – ключ к пониманию движения планет. В 1609 году немецкий астроном Иоганн Кеплер объявил, что планеты движутся вокруг Солнца по эллипсу, и тем самым опроверг теорию о круговых орбитах.

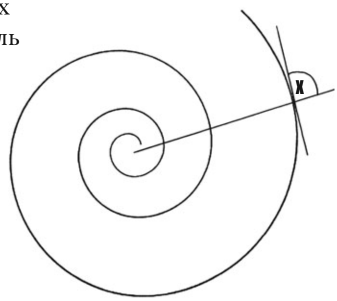
Менее очевидной оказывается траектория движения точки, при котором расстояние до некоторой другой точки (фокус *F*) равно длине перпендикуляра, проведенного до изначально заданной линии (директрисы). В этом случае получаем параболу. У параболы масса полезных свойств. Если разместить источник света в точке фокуса *F*, все лучи, оказавшись за пределами параболы, окажутся параллельны *PM*. С другой стороны, если спутник транслирует телевизионный сигнал и он попадает на параболическую антенну, все лучи собираются в одной точке – в точке фокуса, и оттуда все вместе направляются в телевизор.



Парабола

Если вращать вокруг некоторой точки палку, любая фиксированная точка на этой палке будет описывать круг, однако, если допустить, что точка на палке может перемещаться вдоль нее в процессе вращения палки, получится спираль. Пифагорейцы обожали спираль; гораздо позже Леонардо да Винчи посвятил десять лет жизни изучению разных видов спиралей, а Рене Декарт написал о них целый трактат. Логарифмическая спираль также называется изогональной, потому что образует один и тот же угол с радиусом и касательной в точке пересечения радиуса и спирали.

Якоб Бернулли, представитель знаменитого клана швейцарских математиков, совершенно влюбился в логарифмическую спираль и пожелал, чтобы она была изображена на его надгробии в Базеле. Человек эпохи Возрождения Эммануил Сведенборг считал спираль совершеннейшей из форм. Трехмерная спираль, опоясывающая цилиндр, называется винтовой спиралью. Две такие спирали – двойная винтовая – образуют базовую структуру ДНК.



Логарифмическая спираль

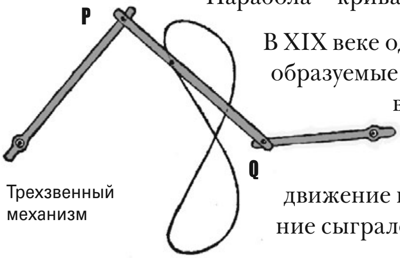
Есть и много других классических кривых – улитка Паскаля, лемниската и разнообразные овалы. Кардиоида называется так

1704
Исаак Ньютон классифицирует кривые третьей степени

1890
Джузеппе Пеано доказывает, что замкнутый квадрат есть кривая (кривая Пеано)

1920-е
Карл Менгер и Павел Урысон относят кривые к топологии

потому, что похожа на сердце. Катенария стала в XVIII веке темой исследования и была определена как линия, которую образует цепь, подвешенная в двух точках. Парабола — кривая, образуемая подвесным мостом между двумя опорами.



Трехзвенный механизм

В XIX веке одним из направлений исследования стали кривые, образуемые движением трехзвенных механизмов. Такого рода вопросы стали следствием задачи, приблизительно решенной инженером Джеймсом Ваттом, изобретшим такое соединение звеньев, которое превращает круговое движение в поступательное. В эпоху паровых машин это изобретение сыграло значительную роль.

Простейший механизм — трехзвенник, в котором звенья соединены последовательно, а концевые точки зафиксированы. Как бы ни двигалась «сцепка» PQ, траектория точки на ней, оказывается, описывает кривую шестого порядка.

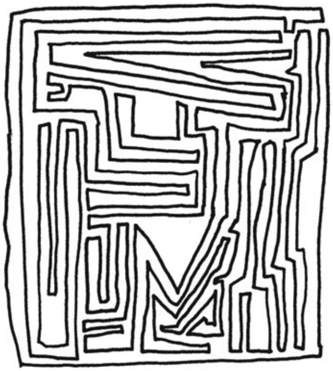
Алгебраические кривые Благодаря Декарту, совершившему революцию в геометрии введением координат x, y и z и картезианских осей, названных в его честь, стало возможно изучать конические сечения как алгебраические уравнения. Например, окружность радиуса 1 описывается уравнением второй степени $x^2 + y^2 = 1$. Все конические сечения описываются уравнениями второй степени. Так отросла новая ветвь геометрии — аналитическая геометрия.

Исаак Ньютон в одном своем масштабном исследовании описал алгебраические уравнения третьей степени, или кубические кривые. Если базовых конических кривых всего четыре типа, кубических оказалось 78; их разделили на пять классов. Лавинообразный рост числа разных типов кривых наблюдается и для кривых четвертого порядка — их оказалось столько, что полной классификации не существует до сих пор.

Изучение кривых как алгебраических уравнений — это еще не все. Многие кривые — катенарии, циклоиды (кривые, описываемые точкой на катящемся колесе) и спирали — не так-то просто описать алгебраически.

Определение Математики искали именно определение кривой как таковой, а не только отдельных примеров. Французский математик Камилль Жордан предложил теорию кривых, построенную на определении кривой в терминах точек с переменными координатами.

Вот пример. Положим, $x^2 = t^2$, а $y = 2t$, тогда для различных значений t получаем множество различных точек, которые можно описать координатами (x, y). Допустим, что $t = 0$, тогда получаем точку (0, 0), $t = 1$ дает нам точку (1, 2) и т. д. Если расставить эти точки в системе координат x–y и соединить их, получим параболу. Жордан усовершенствовал эту идею соединенных точек и принял ее как определение кривой.



Замкнутая простая жорданова кривая

Кривые Жордана могут быть крайне затейливыми, даже когда, как окружность, они «простые» (т. е. не пересекают сами себя) и «замкнутые» (без конца и начала). У знаменитой теоремы Жордана есть понятный смысл: она утверждает, что у простых замкнутых кривых есть внешняя и внутренняя части. Очевидность этого утверждения — лишь кажущаяся.

В 1890 году итальянец Джузеппе Пеано произвел настоящую сенсацию: он показал, что, согласно определению Жордана, закрашенный внутри квадрат есть кривая. Можно так разместить точки по сторонам квадрата, что их все получится соединить и при этом не нарушить жорданова определения. Кривые Пеано пробили брешь в построениях Жордана — разумеется, квадрат не является кривой в привычном смысле слова.

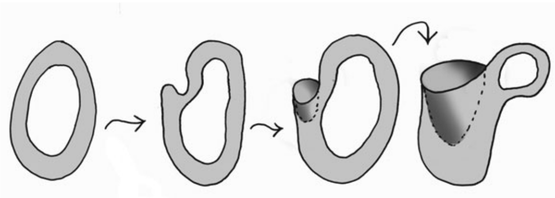
«Заполняющие» кривые и другие примеры-исключения вынудили математиков еще раз вернуться к чертежной доске и переосмыслить основы теории кривых. Вновь встал вопрос об определении кривой. В начале XX века эта задача привела математиков к новому полю знания — топологии.

В сухом остатке: Умом тронуться — по кривой

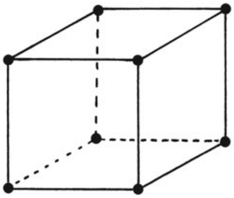
23 Топология

Топология — область геометрии, изучающая свойства поверхностей и форм, но она нимало не касается измерения длин и углов. Самое главное — исследовать свойства, которые при превращении одной формы в другую не меняются. Разрешается вминать и растягивать фигуру в любом направлении, поэтому топологию иногда называют «резиновой геометрией». Топологи — люди, которые не отличат пончик от чашки!

Пончик – поверхность с одной дыркой. Кружка – то же самое, только дырка принимает форму ручки. Вот как пончик можно превратить в кружку:



Классификация полиэдров Простейшие формы, изучаемые топологами, – многогранники, или полиэдры («поли» – много, «эдрос» – грань). Пример многогранника – куб: фигура с 6 гранями, 8 вершинами (вершина – точка соединения граней) и 12 ребрами (ребра – линии, соединяющие вершины). Куб – *правильный* многогранник, потому что:



– все его грани имеют одну и ту же правильную форму;
– все углы между ребрами у вершин равны между собой.

Топология – предмет сравнительно юный, но восходит он к древним грекам; вершиной их достижений в этой области можно считать

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 300 до н. э. Евклид доказывает, что существует пять правильных многогранников

Около 250 до н. э. Архимед исследует усеченные многогранники

1752 Эйлер строит формулу, объединяющую число вершин, ребер и граней многогранника результат, приведенный в Евклидовых «Началах»: существует *в точности* пять правильных многогранников. Это платоновы тела:

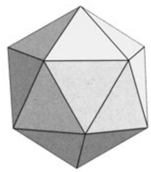
– тетраэдр (с 4 треугольными гранями);
– куб (с 6 квадратными гранями);
– октаэдр (с 8 треугольными гранями);
– додекаэдр (с 12 пятиугольными гранями);
– икосаэдр (с 20 треугольными гранями).

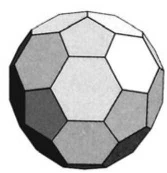

Тетраэдр


Куб


Октаэдр


Додекаэдр


Икосаэдр


Усеченный икосаэдр

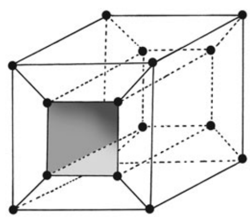
Опустив условие о равенстве всех граней, мы окажемся в пространстве архимедовых тел – полуправильных многогранников. Их можно получить, видоизменив платоновы тела. Если отрезать (усечь) кое-какие углы икосаэдра, получится фигура, по форме которой ныне изготавливают футбольные мячи. У этой фигуры 32 грани, из них 12 – пятиугольники и 20 – шестиугольники, 90 граней и 60 вершин. Ту же форму имеют бакминстерфуллерены – молекулы, названные в честь провидца Ричарда Бакминстера Фуллера, создателя геодезического купола. Бакминстерфуллерены – форма существования углерода, C_{60}, в молекуле которого атомы углерода расположены в вершинах усеченного икосаэдра.

Формула Эйлера Согласно формуле Эйлера, число вершин V, ребер E и граней F в многограннике связаны так:

$$V - E + F = 2.$$

Например, для куба $V = 8$, $E = 12$, а $F = 6$, значит, $V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2$, а для бакминстерфуллерена $V - E + F = 60 - 90 + 32 = 2$. Эта теорема на самом деле проверяет на прочность саму концепцию многогранника.

Если сквозь куб проходит «тоннель», является ли такой куб подлинным многогранником? Для такой формы $V = 16$, $E = 32$, $F = 16$, следовательно, $V - E + F = 16 - 32 + 16 = 0$. Формула Эйлера не работает.


Куб с тоннелем

Чтобы формула действовала, нужно либо применять ее только к многогранникам без тоннелей, либо обобщить так, чтобы она распространялась и на эти отдельные случаи.

1858
Август Ф. Мёбиус и Иоганн Б. Листинг описывают ленту Мёбиуса

1961
Стивен Смэйл доказывает гипотезу Пуанкаре для размерностей пространства, бóльших 4

1982
Майкл Фридмен доказывает гипотезу Пуанкаре для размерности пространства, равной 4

2002
Григорий Перельман доказывает гипотезу Пуанкаре для размерности пространства, равной 3

Классификация поверхностей Тополог, может, и считает пончик и кружку одним и тем же, но в таком случае какая поверхность будет *отлична* от пончика? Возможный кандидат – резиновый мяч. Пончик в мяч никак не превратить: у пончика есть дырка, а у мяча – нет. В этом и состоит их фундаментальная разница. Таким образом, один из способов классификации поверхностей – по числу дырок в них.

Возьмем поверхность с r дырами и разделим ее на области, ограниченные ребрами, соединяющими вершины, размещенные по поверхности. Проделав эту операцию, посчитаем число вершин, ребер и граней. При любом разбиении на области формула Эйлера $V - E + F$ всегда имеет один и тот же результат, называемый эйлеровой характеристикой пространства:

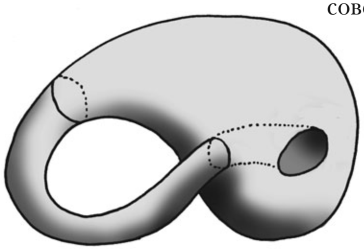
$$V - E + F = 2 - 2r.$$

Если у формы нет дыр ($r = 0$) – как в случае с обычными многогранниками, – формула принимает вид исходной: $V - E + F = 2$. В случае с одной дырой ($r = 1$) – куб с тоннелем: $V - E + F = 0$.

Лента Мёбиуса

Односторонние поверхности Обычно у поверхности две стороны. Внешняя сторона шара отделена от внутренней, и единственный способ попасть с одной стороны на другую – просверлить в шаре отверстие, а это операция разрезания, недопустимая в топологии (растягивать можно, а резать – нет). Лист бумаги – еще один пример двухсторонней поверхности. Единственное место, где две стороны стыкуются, – кромки листа.

Мысль об односторонней поверхности кажется маловероятной. Однако знаменитая односторонняя поверхность была открыта немецким математиком и астрономом Августом Мёбиусом в XIX веке. Сконструировать такую поверхность можно из того же листа бумаги, скрутив его и склеив концы вместе. В результате получится «лента Мёбиуса» – односторонняя поверхность с одной граничной кривой. Если взять карандаш и начать рисовать линию посередине такой ленты, совсем скоро вы окажетесь в той же точке, с которой начали!



Бутылка Клейна

Можно, более того, создать одностороннюю поверхность, у которой нет граничной кривой. Это «бутылка Клейна», названная в честь немецкого математика Феликса Клейна (Кляйна). Что особенно примечательно, эта бутылка не пересекает сама себя. Однако создать модель не пересекающей саму себя бутылки Клейна в трехмерном пространстве невозможно, а вот в четырехмерном – вполне.

Обе эти поверхности — примеры того, что топологи называют многообразиями, т. е. геометрических поверхностей, выглядящих как лист двухмерной бумаги, если рассматривать *небольшие* его фрагменты по отдельности. Поскольку у бутылки Клейна нет краев, ее называют *односвязным* двухмерным многообразием.

Гипотеза Пуанкаре Больше века непревзойденной задачей топологии была знаменитая гипотеза, названная в честь Анри Пуанкаре. Эта гипотеза связывает алгебру и топологию.

Частично эта задача применительно к трехмерным многообразиям до последнего времени оставалась нерешенной. Тут все непросто: попытайтесь представить бутылку Клейна с дополнительным измерением. Пуанкаре предположил, что определенные односвязные трехмерные многообразия, имеющие все алгебраические признаки трехмерных сфер, на самом деле таковыми и должны являться. Будто гуляете вы по огромному трехмерному мячу и все ваши наблюдения подсказывают вам, что это — сфера, но поскольку всей картины вам не видно, приходится гадать, верны ваши предположения относительно сферы или нет.

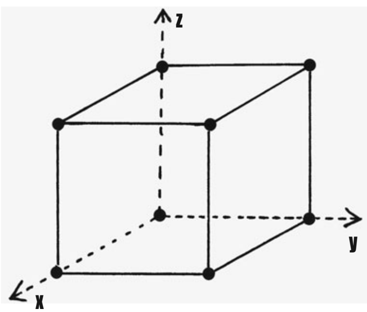
Никому не удавалось доказать гипотезу Пуанкаре для трехмерных многообразий. Верна она или нет? Для всех остальных измерений эта гипотеза была обоснована, а вот трехмерные многообразия все никак не сдавались. Возникало множество ложных доказательств, пока наконец в 2002 году Григорий Перельман из Математического института им. Стеклова в Петербурге не доказал гипотезу Пуанкаре. Как и решение многих других великих задач математики, методы решения задачи Пуанкаре лежат за пределами ее непосредственной области и связаны с тепловой диффузией.

В сухом остатке: От пончиков к чашкам

24 Измерение

Леонардо да Винчи как-то отметил в своей записной книжке: «Наука живописи начинается с точки, превращается в линию, третьей возникает плоскость, а четвертой — тело в одеянии плоскостей». В иерархии да Винчи точка — нулевое измерение, линия одномерна, плоскость двухмерна, а пространство трехмерно. Что может быть очевиднее? Именно так представлял себе геометрию точки, линии, плоскости и тела греческий геометр Евклид, а Леонардо следовал его представлениям.

Трехмерность физического пространства была понятна тысячелетиями. В физическом пространстве мы можем перемещаться *вдоль* этой страницы по оси x, *поперек* ее, т. е. горизонтально, по оси y, или над ней — вдоль оси z, а также в любой комбинации этих координат. Относительно точки начала координат (где все три оси пересекаются) у любой точки есть пространственные координаты, определяемые значениями x, y и z, и записываются в виде (x, y, z).



Пространство трех измерений

У куба эти три измерения очевидны — равно как и у чего угодно твердого. По школьной программе мы обычно сначала изучаем геометрию на плоскости, т. е. двухмерную геометрию (планиметрию), после чего приступаем к трехмерному пространству — к «геометрии тел» — и на том останавливаемся.

Примерно в начале XIX века ученые начали барахтаться в четырехмерной и даже более высокой n-мерной математике. Многие философы и математики начали задаваться вопросом, существуют ли более высокие размерности пространства.

Высшие физические измерения Многие ведущие математики прошлого думали, что четыре измерения невообразимы.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 300 до н. э.

Евклид описывает трехмерный мир

1877

Георг Кантор поражен собственным противоречивым открытиям в области теории размерности

Они сомневались в реальности четырех измерений, и объяснить их было крайне непросто.

Распространенным способом объяснить возможность четырех измерений было возвращение к двухмерности. В 1884 году английский учитель и теолог Эдвин Эбботт издал ставшую невероятно популярной книгу о «флэтландцах», проживавших на двухмерной плоскости. Не видать им было ни треугольников, ни квадратов, ни окружностей, существовавших во Флэтландии, – они не могли выйти в третье измерение и обозреть их. Их видение было сильно ограничено. У них возникали те же проблемы с представлением третьего измерения, какие появляются у нас, когда мы думаем о четвертом. Но чтение Эбботта позволяет нам настроить ум на принятие четвертого измерения.

Потребность осмыслить реальность существования четырехмерного пространства встала еще острее с появлением Эйнштейна. Четырехмерная геометрия обрела убедительность и даже возможность быть понятой благодаря Эйнштейновой модели, в которой дополнительным измерением стало *время*. В отличие от Ньютона, Эйнштейн воспринимал время как неразрывно связанное с пространством в четырехмерном пространственно-временном континууме. Эйнштейн объявил, что мы живем в четырехмерном мире и четырех координатах (x, y, z, t), где t обозначает время.

Ныне четырехмерный Эйнштейнов мир воспринимается нами обыденно и как должное. Более поздняя модель физической реальности основана на «струнах». Согласно этой теории, знакомые нам субатомные частицы вроде электронов есть проявления малюсеньких вибрирующих струн. Теория струн предполагает замещение четырехмерного пространственно-временного континуума пространством более высокой мерности. Из текущих исследований выходит, что пространство, в котором может существовать струнно-временной континуум струнной теории, должно быть 10-, 11- или 26-мерным, в зависимости от дальнейших условий рассуждения и различных точек зрения.

Огромный 2000-тонный магнит в ЦЕРНе (Европейском институте ядерных исследований) близ Женевы, Швейцария, предназначенный для разгона и столкновения частиц на высоких скоростях, вероятно, поможет решить эту задачу. Предполагается, что это даст нам ключ к устройству материи и попутно, быть может, обозначит лучшую теорию и «правильный» ответ на вопрос о мерности пространства. Поговаривают, что мы, кажется, все-таки живем в 11-мерной Вселенной.

Гиперпространство В отличие от высших физических измерений, *математическое* пространство никаких проблем с мерностями пространства более трех

1909

Работа Лёйтзена Э. Я. Брауэра меняет наше представление о размерности

1919

Феликс Хаусдорф вводит понятие дробной «хаусдорфовой» размерности

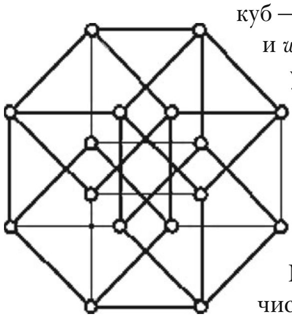
1970

Теория струн предполагает, что наша Вселенная — 10-, 11- или 26-мерная не имеет. С начала XIX века математики в своих работах привычно использовали для этого переменную n.

Мельник из Ноттингэма Джордж Грин, исследовавший математическую сторону электричества, а также представители чистой математики Огюстен Л. Коши, Артур Кэли и Герман Грассман осуществляли математические выкладки в терминах n-мерного гиперпространства. Не было, словом, никакой убедительной причины ограничивать математику и результаты ее работы в изяществе и ясности.

Суть n измерений — всего лишь добавление скольких угодно дополнительных координат к трехмерным (x, y, z). Двухмерная окружность описывается уравнением $x^2 + y^2 = 1$, сфера в трехмерном пространстве — уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, в таком случае отчего бы гиперсферу в четырехмерном пространстве не описать так: $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.

Координаты восьми углов куба в трехмерном виде (x, y, z) равны либо 0, либо 1. У куба шесть граней, каждая из которых есть квадрат, и $2 \times 2 \times 2 = 8$ углов. А четырехмерный куб — это как? Координаты его углов будут иметь вид (x, y, z, w), где x, y, z и w будут равны либо 0, либо 1. Таким образом, получается, что у четырехмерного куба $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ возможных углов и 8 граней, каждая из которых есть куб. Увидеть четырехмерный куб не получится, но некоторый художественный эскиз прямо на этой странице изобразить можем. Это проекция четырехмерного куба, существующая в воображении математика. Кубические грани мы почти в силах себе представить.



Четырехмерный куб

Математическое многомерное пространство — вполне общее место чистой математики. Никаких заявлений о возможности его реального существования никто не делает, однако можно предположить его в пространстве Платоновых идей. В грандиозной задаче классификации групп (см. стр. 155), например, «группа-монстр» — способ описания симметрии в 196 833-мерном пространстве. «Увидеть» это пространство мы не можем — во всяком случае так, как мы воспринимаем наше обыденное трехмерное, однако его все-таки можно вообразить и даже оперировать в нем точными методами современной алгебры.

Математику размерность интересует совершенно отдельно от того, какой смысл в анализ размерностей вкладывают физики. Физические сущности измеряются в терминах массы M, длины L и времени T. Применяя к ним анализ размерностей, физик может проверить, имеют ли смысл его уравнения, поскольку по обеим сторонам равенства размерности должны быть одинаковые.

Чего ж хорошего, когда сила = скорость? Анализ измерений обязывает скорость выражаться в метрах в секунду, т. е. скорость имеет измерение длины, деленной на время, т. е. L/T, что можно записать и так: LT^{-1}.

Сила — это масса, умноженная на ускорение, а ускорение измеряется в метрах на секунду в квадрате, итого сила имеет измерения MLT^{-2}.

Люди в координатах

Сами люди — многомерные существа. У человека координат гораздо больше трех. Можно записать (a, b, c, d, e, f, g, h), таким образом обозначив возраст, рост, вес, пол, размер обуви, цвет глаз, цвет волос, национальность и т. д. Вместо геометрических точек можно подставить людей. Если ограничиться восьмимерным «пространством» людей, у какого-нибудь Джона могут быть следующие координаты (43 года, 165 см, 83 кг, мужской, 9, голубые, светлые, датчанин), а у какой-нибудь Мэри (26 лет, 157 см, 56 кг, женский, 4, карие, темные, англичанка).

Топология Теория размерности — часть общей топологии. Другие концепции размерности можно определить независимо, в терминах абстрактных математических пространств. Главное — показать, как они друг с другом взаимосвязаны. Ключевые во многих областях математики фигуры разбирались со значением размерности, в том числе: Анри Лебеск, Л. Э. Я. Брауэр, Карл Менгер, Павел Урысон и Леопольд Фиторис (до недавнего времени — старейший австриец, скончавшийся в 2002 году в возрасте 110 лет).

Важнейшая работа в этой области — «Теория размерности». Она была опубликована в 1948 году Витольдом Гуревичем и Генри Волмэном, но до сих пор остается нашим оплотом понимания концепции размерности.

Размерность во всех ее проявлениях Со времен древних греков и их представлений о трех измерениях, концепция размерности была исследована вдоль и поперек, проанализирована и расширена.

Довольно безболезненно были введены *n* измерений математического пространства, тогда как физики основывали свои теории на пространстве-времени (время как четвертое измерение) и свежей теории струн (см. стр. 97), требующей 10, 11 или 26 измерений. Происходили и некоторые набеги на дробные размерности и фрактальные фигуры (см. стр. 100), их изучали несколькими разными методами. Гилберт ввел бесконечномерное пространство — ныне оно является базой для работы в чистой математике. Размерность — нечто гораздо большее, чем одно-, двух- или трехмерная евклидова геометрия.

В сухом остатке: За пределами третьего измерения

25 Фракталы

В марте 1980 года ультрасовременный суперкомпьютер исследовательского центра «Ай-би-эм» в Йорктаун-Хайтс, штат Нью-Йорк, выдал инструкции древнему печатному устройству «Тектроникс». То прилежно расставляло точки на чистом листе бумаги в интересных местах, а когда наконец перестало клацать, результат выглядел так, будто на страницу швырнули горсть пыли. Бенуа Мандельброт не поверил глазам своим. Он явственно понимал, что наблюдает нечто важное, но вот что? Рисунок медленно прояснялся перед его взором подобно черно-белой фотографии, проступающей на бумаге в фотопроявочной ванне: первый проблеск иконы фрактального мира — множество Мандельброта.

То была экспериментальная математика в лучшем виде — подход к предмету, который предполагал наличие у математиков лабораторий, в точности как у физиков или химиков. И математики могли ставить эксперименты. Им буквально открывались новые горизонты. Им представилась возможность сбежать из засушливого края «определений, теорем, доказательств», хотя позднее все равно пришлось возвращаться к строгой аргументации.

Слабость экспериментального подхода состояла в том, что визуальные представления в нем предшествовали теоретическим обоснованиям. Экспериментаторы двигались без карт. Мандельброт предложил название «фракталы», но что это такое? Может ли у них возникнуть точное определение, как это обычно бывает в математике? Поначалу Мандельброту не хотелось с этим возиться. Он не желал уничтожать волшебство переживания шлифовкой точного определения, которое могло оказаться недостаточным и ограничивающим. Он чувствовал, что понятие фрактала, «как хорошее вино, должно настояться, а уж потом оказаться в бутылке».

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1879

Работы Артура Кэли — предтеча современных представлений о фракталах

1904

Нильс фон Кох строит кривую-«снежинку»

Множество Мандельброта Мандельброт и его коллеги не были слишком уж заумными математиками. Они игрались с простейшими формулами. Вся их идея основывалась на итерации — многократном применении одной и той же формулы. Формула, от которой произошло множество Мандельброта, была незатейливой: $x^2 + c$.

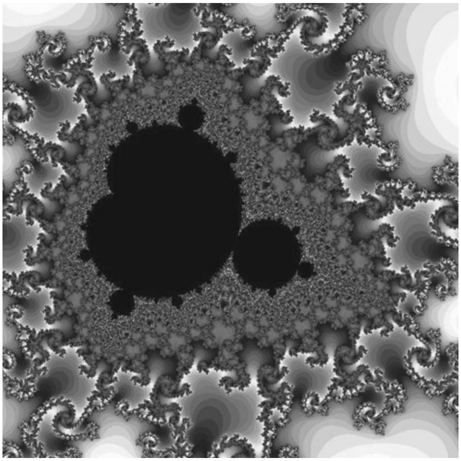
Первым делом выберем значение c. Пусть будет $c = 0{,}5$. Начнем с $x = 0$, подставим в формулу $x^2 + 0{,}5$. Первый расчет даст в результате 0,5. Подставим этот результат вместо x, подставим в формулу $x^2 + 0{,}5$, получим $(0{,}5)^2 + 0{,}5 = 0{,}75$. Если продолжать в том же духе, на третьем заходе получим $(0{,}75)^2 + 0{,}5 = 1{,}0625$. Все эти расчеты можно произвести на ручном калькуляторе, результат при этом будет расти.

Давайте возьмем другое значение c, например $c = -0{,}5$. Как и ранее, начнем с $x = 0$ и подставим в формулу $x^2 - 0{,}5$, получим в ответе – 0,5. Далее получим – 0,25, но на этот раз результат уравнения не будет расти бесконечно, а после некоторой осцилляции приблизится к числу – 0,3660...

Таким образом, при $c = 0{,}5$ последовательность, начинающаяся с $x = 0$, устремляется в бесконечность, а при $c = -0{,}5$, начатая с $x = 0$, приближается к округленному значению – 0,3660. Множество Мандельброта состоит из всех этих значений для c, при которых последовательность, начавшись с $x = 0$, *не* удирает в бесконечность.

Однако это еще не все — мы рассмотрели пока лишь одномерные действительные числа: одномерное множество Мандельброта не слишком зрелищно. Следует рассмотреть ту же формулу, $z^2 + c$, в которой z и c — двухмерные комплексные числа (см. стр. 32). В результате получим двухмерное множество Мандельброта.

Множество Мандельброта



При некоторых значениях c последовательность чисел z творит всякие удивительные вещи — например, пляшет между несколькими точками, но не утекает в бесконечность. Множество Мандельброта указывает нам на ключевое свойство фракталов — самоподобие. Увеличивая фрагмент множества, вы никогда не будете уверены, насколько сильно это увеличение, — вам будут открываться все новые множества Мандельброта.

1918

Феликс Хаусдорф вводит понятие дробной размерности

1919

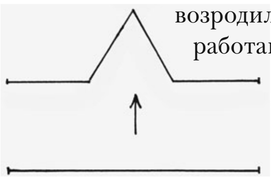
Гастон М. Жюлиа и Пьер Ж. Л. Фату исследуют фрактальные структуры на плоскости комплексных чисел

1975

Бенуа Мандельброт вводит термин «фрактал»

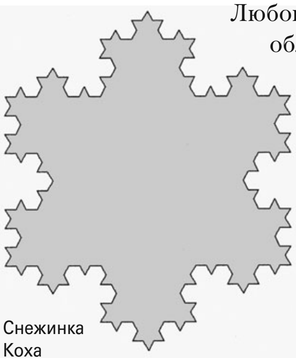
До Мандельброта Как и многое другое в математике, открытия редко бывают совсем уж новыми. Изучив историю своей дисциплины, Мандельброт обнаружил, что у математиков Анри Пуанкаре и Артура Кэли уже возникали похожие идеи за сто лет до него. К сожалению, им для углубленного исследования недоставало вычислительных мощностей.

Среди фигур, открытых первыми теоретиками самоподобных структур, были разные кудрявые кривые и Пеановы закорючки, от которых отмахнулись, сочтя патологическими примерами кривых, – причем патологическими настолько, что математикам показалось необходимым запереть их в шкафу и не обращать внимания. Ученые желали найти что-нибудь понормальнее, «поглаже» – т. е. кривые, с которыми можно было бы обращаться методами дифференциального анализа. Популярность фракталов возродила работы других математиков – Гастона Жюлиа и Пьера Фату, работавших с фракталоподобными структурами в плоскости комплексных чисел сразу после Первой мировой войны. Их кривые фракталами не назывались, конечно, да и оборудования для того, чтобы посмотреть на эти фигуры, у них не было.



Звено кривой Коха

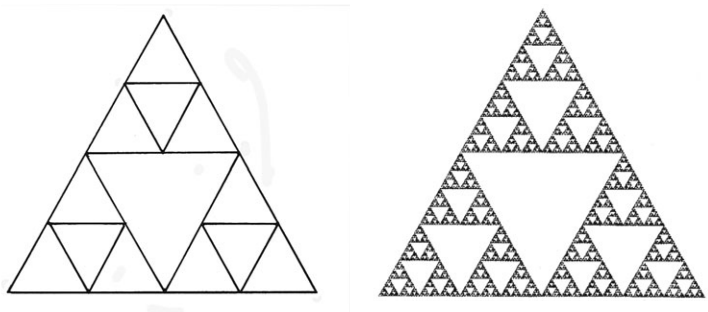
Другие прославленные фракталы Знаменитая кривая Коха названа в честь шведского математика Нильса Фабиана Хельге фон Коха. Кривая в форме снежинки – фактически первая фрактальная кривая. Она получается при обращении с одной из сторон треугольника как с единичным звеном, которое делится на три равные части, и к серединной части пристраивается новый треугольник.



Снежинка Коха

Любопытное свойство кривой Коха состоит в том, что это конечная область, поскольку остается в пределах некоторого круга, однако на каждой стадии приращения длина этой кривой увеличивается. Таким образом, получается кривая, ограничивающая конечную площадь, но при этом сама она имеет «бесконечную» длину!

Еще один известный фрактал назван в честь польского математика Вацлава Серпиньского. Он получается вычленением



Салфетка Серпиньского

треугольников из равностороннего треугольника; продолжая в том же духе, получим салфетку Серпинского (она генерируется и в другом математическом процессе, стр. 54).

Дробные размерности Свежий взгляд на размерность пространства предложил немецкий математик Феликс Хаусдорф. Его представление связано с показателем степени. Если увеличить длину отрезка втрое, отрезок становится в три раза больше исходного. Поскольку $3 = 3^1$, размерность линии считается равной 1. Если замкнутый квадрат увеличить втрое, его *площадь* против исходной увеличится в 9 раз, т. е. 3^2, а значит, размерность получается 2. Если куб увеличить аналогично, его объем возрастет в 27 раз (3^3) – размерность 3. Значения Хаусдорфовых размерностей совпадают с нашими ожиданиями для прямой, квадрата или куба.

Если элементарное звено кривой Коха масштабировать втрое, оно становится в 4 раза длиннее исходного. Применим хаусдорфову размерность D к приведенной схеме: $4 = 3^D$. Вычислим D:

$$D = \frac{\log 4}{\log 3}$$

что означает размерность для кривой Коха приблизительно 1,262. С фракталами часто выходит такая штука: хаусдорфова размерность для них больше обыкновенной – для кривой Коха это 1.

Хаусдорфова размерность наполнила дополнительным смыслом Мандельбротово определение фрактала: это множество точек, для которого значение D – не целочисленное. Дробная размерность стала ключевым свойством фракталов.

Практические приложения фракталов Потенциал применимости фракталов широк. Фракталы – хороший математический способ моделирования природных процессов, например роста растений или образования облаков.

Фракталы уже применяют к описанию роста морских организмов – кораллов и губок. Разрастание современных городов, оказалось, тоже похоже на фрактальное. В медицине при помощи фракталов моделируют деятельность мозга. Есть и исследования фрактальности движений ценных бумаг на международных фондовых биржах. Работа Мандельброта открыла много нового, но немало открытий еще предстоит сделать.

В сухом остатке: Фигуры с дробными размерностями

26 Хаос

Какая у хаоса вообще может быть теория? Хаос — это же как раз отсутствие всякой теории, верно? Наша история началась в 1812 году. Наполеон двигался на Москву, а его соотечественник, маркиз Пьер-Симон де Лаплас, опубликовал сочинение о детерминированной Вселенной: если бы нам стали известны все расположения и скорости всех объектов во Вселенной, а также все силы, воздействующие на них в заданный момент времени, можно было бы точно рассчитать все эти значения на все дальнейшее время. Вселенная и все ее объекты оказались бы полностью определены. Теория хаоса показывает, что мир затейливее этого предположения.

В реальном мире мы не можем *точно* знать все положения, скорости и силы, однако естественным следствием Лапласова предположения выглядело, что, знай мы приблизительные значения всех этих показателей в тот или иной момент времени, Вселенная не отличалась бы от той, что мы знаем. В этом был здравый смысл: ясно же, что бегуны, стартовавшие через одну десятую секунды после выстрела, сорвут финишную ленту всего на одну десятую секунду позже своего обычного времени на дистанции забега. Тогда верили, что небольшие изменения начальных условий мало меняют и результат. Теория хаоса не оставила от этих представлений камня на камне.

Эффект бабочки Небольшое изменение исходных условий некоторого явления может привести к результатам, сильно отличающимся от ожидаемых, — в этом состоит эффект бабочки. Допустим, в Европе прогнозируют погожий день, а где-нибудь в Южной Америке бабочка взмахнет крыльями, и на другом конце мира может начаться буря: от одного взмаха может слегка измениться атмосферное давление и погода поведет себя в полном несоответствии с прогнозами.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

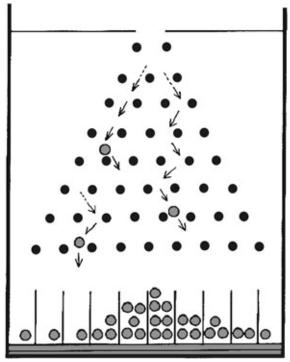
1812

Пьер-Симон де Лаплас публикует эссе о детерминированнности Вселенной

1889

Анри Пуанкаре сталкивается с хаосом при работе над задачей о трех телах, за которую получит премию шведского короля Оскара

Эту мысль можно проиллюстрировать простым механическим экспериментом. Если запустить металлический шарик на пинбольное поле, он покатится вниз по траектории, изменяемой штырьками, на которые будет налетать по ходу движения, покуда не окажется в лотке в нижней части ящика.



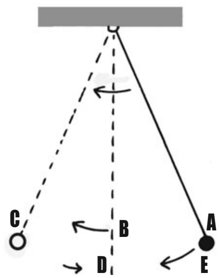
Эксперимент с пинбольными шариками

Можно попробовать запустить следующий шарик, идентичный первому, с той же точки и с той же скоростью. Если реально было бы проделать это *в точности* так же, маркиз де Лаплас оказался бы прав и траектория шарика была бы той же, что и в первом случае. Если первый шарик попал в третий лоток справа, и второй окажется там же.

Но, ясное дело, не получится ввести шарик из точно того же положения и в точности с той же скоростью и силой, что и первый. В реальности окажется, что хоть какая-нибудь разница да возникнет — вы ее даже не сможете измерить, и в результате у шарика может получиться совершенно иной маршрут, и окажется он в другом лотке.

Простой маятник Свободный маятник — одна из простейших для анализа механических систем. Качаясь из стороны в сторону, маятник постепенно теряет энергию. Смещение от вертикали и (угловая) скорость груза уменьшаются, пока маятник не остановится окончательно.

Движение груза можно описать при помощи фазовой диаграммы. По горизонтальной оси измеряется (угловое) смещение, а по вертикальной — скорость. Точка *A*, где маятник отпускают, находится в положительной части горизонтальной оси, и в ней смещение груза максимально, а скорость равна нулю. Груз движется и проходит через вертикальную ось (смещение равно нулю), где скорость его максимальна; отметим эту точку на диаграмме как *B*. В точке *C* груз оказывается на противоположном конце хода, смещение его отрицательно, а скорость равна нулю. Затем груз возвращается через точку *D* (двигаясь в противоположном направлении, стало быть, скорость его отрицательна) и завершает цикл колебаний в точке *E*. На фазовой диаграмме этот цикл описывается оборотом в 360°, но поскольку колебания угасают, точка *E* показана левее точки *A*. Если маятник продолжит качаться спокойнее, фазовый портрет его движения спиралью упрется в начало координат. Маятник остановится.



Свободный маятник

1961

Эдвард Лоренц наблюдает эффект бабочки

1971

Роберт Мей исследует хаос в модели численности населения

2004

Теория хаоса внедряется в поп-культуру: на экраны выходит фильм «Эффект бабочки»

Фазовая диаграмма для простого маятника

Все иначе у двойного маятника: груз в нем прикреплен к последовательно соединенным звеньям. Если смещение невелико, движение двойного маятника похоже на движение простого, однако, если смещение большое, груз раскачивается, вращается и болтается так и эдак, а смещение от средней точки — будто бы случайное. Если движение происходит без воздействия внешней силы, груз в конце концов придет к покою, но кривая, описывающая его движение, совсем не такая смирная, как спираль простого маятника.

Хаотическое движение Характеристика хаоса состоит в том, что детерминированная система может вести себя случайным образом.

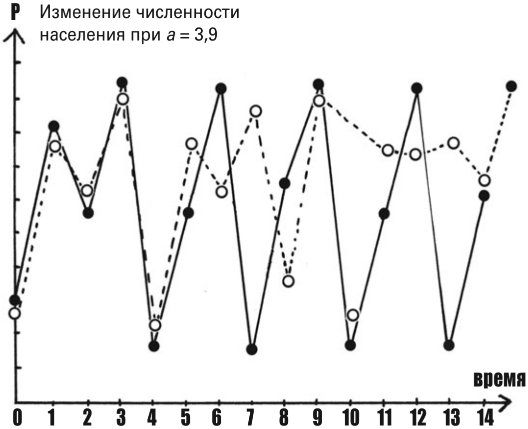
Рассмотрим еще один пример — повторяющуюся, или итерационную, формулу $a \times p \times (1 - p)$, где p — население, измеряемое в виде пропорции в пределах от 0 до 1. Значение a должно быть между 0 и 4, чтобы соблюсти диапазон значений p от 0 до 1.

Движение двойного маятника

Смоделируем изменение численности населения при $a = 2$. Возьмем начальное значение p, допустим, 0,3 (в момент *времени* 0), тогда в момент *времени* = 1 получаем, подставив $p = 0{,}3$ в $a \times p \times (1 - p)$, 0,42. При помощи бытового калькулятора повторим эту операцию с $p = 0{,}42$ и получим 0,4872. Продолжая по этой схеме, получим значения численности населения в разные моменты времени. При заданных условиях эта численность довольно скоро установится на $p = 0{,}5$. Такая стабилизация происходит всегда при значениях a меньше 3.

Возьмем теперь $a = 3{,}9$, значение, близкое к максимально допустимому, а за начальную точку примем то же значение $p = 0{,}3$. В этом случае стабилизации не происходит — значения колеблются в широком диапазоне. Это оттого, что значение a оказывается в «хаотической области» — это диапазон значений a больше 3,57. Более того, если выбрать другое начальное значение численности населения — к примеру, $p = 0{,}29$ (близкое к 0,3) — рост численности поначалу очень похож на предыдущий, но вскоре становится полностью от него отличен. Такое поведение этих графиков отметил Эдвард Лоренц в 1961 году.

Изменение численности населения при $a = 3{,}9$



Предсказание погоды Всем нам известно, что даже с самыми мощными компьютерами невозможно предсказать погоду дольше чем на несколько дней вперед. Через пару-тройку дней погода может устроить нам гадкие сюрпризы. А все оттого, что уравнения, описывающие погоду, — нелинейные, в них участвуют перемноженные переменные, а не входящие в уравнение по отдельности.

Математическая теория, стоящая за прогнозом погоды, была разработана независимо французским инженером Клодом Навье в 1821 году и британским физиком-математиком Джорджем Г. Стоксом в 1845-м. Полученные «уравнения Навье—Стокса» вызвали активный интерес ученых. Кембриджский Математический институт Клея (Массачусеттс) объявил награду в миллион долларов тому, кто добьется заметных результатов в разгадке тайн этих уравнений. Они успешно применяются к гидродинамике верхних слоев атмосферы. Но движение воздуха вблизи поверхности Земли турбулентно и приводит к хаосу, чье поведение нам почти неведомо.

От метеорологии к математике

Открытие эффекта бабочки в 1961 году произошло случайно. Метеоролог Эдвард Лоренц из Массачусеттского технологического института ушел выпить кофе и оставил свой допотопный компьютер заниматься порученными ему графиками, а когда вернулся, обнаружил нечто неожиданное. Ученый собирался построить кое-какие интересные погодные кривые, а результат оказался совершенно не узнаваем. Странное дело: Лоренц ввел те же исходные значения и ожидал идентичной картинки на выходе. Может, пришла пора избавиться от старого компьютера и обзавестись чем-нибудь понадежнее? Обдумав полученный результат, Лоренц тем не менее обнаружил разницу в исходных данных: прежде он вводил все цифры с точностью до шестого знака после запятой, а тут вдруг поленился и ввел лишь по три. Возникшее расхождение в результатах он и назвал «эффектом бабочки». После этого открытия его интеллектуальные интересы сместились в математическое поле.

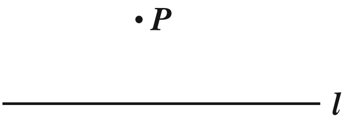
Теория систем линейных уравнений изучена очень хорошо, а вот уравнения Навье—Стокса содержат нелинейные члены, что делает сами уравнения нерешаемыми. Практически единственный способ решать такие уравнения — численный, т. е. применением мощных компьютеров.

Странные аттракторы Есть представление, что фазовые диаграммы динамических систем содержат «аттракторы». В случае простого маятника аттрактор — единственная точка в начале координат, к которой устремляется движение груза. С двойным маятником все сложнее, но и в его случае фазовый рисунок покажет некоторую упорядоченность: груз будет тяготеть к нескольким точкам на фазовой диаграмме. Для таких систем множество точек может образовывать фрактал (см. стр. 100), называемый «странным» аттрактором, с отчетливой математической структурой. Так что не все потеряно. В новой теории хаос не такой уж хаотический — скорее, «упорядоченный».

В сухом остатке: Буйство порядка

27 Аксиома параллельности

Эта захватывающая история начинается с простого геометрического сценария. Вообразим линию *l* и точку *P*, не лежащую на этой линии. Сколько линий можно провести через точку *P* так, чтобы они были параллельны линии *l*? Вроде бы само собой, что таких линий всего одна — такая, что никогда не пересечется с линией *l*, сколько бы мы ее ни длили. Это кажется очевидным и в полном согласии со здравым смыслом.



Евклид Александрийский включил версию этой очевидной идеи как один из постулатов в главную книгу всей геометрии — в «Начала».

Здравый смысл — поводырь не всегда надежный. Давайте убедимся, что Евклидово заключение имеет и математический смысл.

Евклидовы «Начала» Евклидова геометрия — 13 книг «Начал», написанных в 300-х годах до н. э. Это один из самых влиятельных математических трудов; античные математики считали его первой систематизацией геометрии. Позднее ученые изучали и переводили эти труды с доживших до наших дней манускриптов, их передавали из поколения в поколение и всегда считали эталоном геометрического знания.

«Начала» добрались до школьной программы — «священная книга» стала методикой преподавания геометрии. Правда, самым младшим школьникам она оказалась не по зубам. Как сострил поэт А. К. Хилтон в пародийной поэме «Стервятник и Землепашец»*, «хоть и зубрили на зубок, а чертят черт-те что». Можно возразить, что Евклид писал не мальчикам, но мужам.

* Пародийное стихотворение Артура Клемента Хилтона (1851–1877), написанное в тот же год (1871), что и «Приключения Алисы в Стране чудес» и сходного стихотворения «Морж и Плотник» математика Ч. Л. Доджсона (Льюиса Кэрролла).

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 300 н. э.

Евклид включает постулат параллельности в «Начала»

1829–1831

Николай Иванович Лобачевский и Янош Бойяи публикуют труды о гиперболической геометрии

В программах английских школ Евклидовы работы пережили пик влиятельности еще в XIX веке, однако и в наше время они остаются для математиков краеугольным камнем.

Самое замечательное в «Началах» — их стиль, а главное достижение — представление геометрии как последовательности доказываемых суждений. Шерлок Холмс наверняка восхищался бы дедуктивным методом Евклида — логическим продвижением от ясно сформулированных аксиом — и мог бы честить доктора Уотсона за неспособность видеть в этом «холодную безэмоциональную систему».

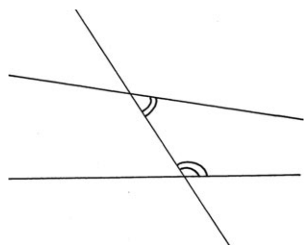
Хоть здание евклидовой геометрии и зиждется на постулатах (которые ныне называются аксиомами, см. врезку справа), их было не достаточно. Евклид добавил «определения» и «общие понятия». Определения включают в себя формулировки типа «точка есть то, часть чего есть ничто» и «линия есть длина без ширины». Примеры общих понятий: «целое больше части», «вещи, равные другой вещи, равны между собой». Лишь к концу XIX века выяснилось, что Евклидовы допущения неочевидны.

Постулаты Евклида

Одна из особенностей математики состоит в том, что мало из каких допущений вырастают развитые теории. Евклидовы постулаты — отличный пример и конструкт, послуживший образцом для дальнейших аксиоматических систем. Вот эти пять постулатов:

1. Прямая линия может быть проведена от любой точки к любой точке.
2. Конечная прямая линия может быть продолжена как прямая сколь угодно долго.
3. Можно построить круг с любым центром и любым радиусом.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая линия, пересекающая две другие прямые линии, дает внутренние углы по одну сторону, меньшие суммы двух прямых углов, то две прямые линии, продолженные до бесконечности, пересекутся с той стороны, где сумма двух углов меньше, чем два прямых.

Пятый постулат Именно пятый постулат Евклида вызвал полемику 2000 лет спустя после появления «Начал». Даже сам стиль его выглядит чужеродно — слишком уж многословен и неуклюж. Евклид и сам не радовался этой формулировке, но ему необходимо было доказывать суждения, а поэтому потребовался пятый постулат. Он попытался доказать его с помощью других постулатов, но ему это не удалось.



Позднее математики пытались то доказать его, то заменить на что-нибудь попроще. В 1795 году Джон Плейфэр предложил

1854	1872	1915
Георг Ф. Б. Риман читает лекции по основам геометрии	Феликс Клейн унифицирует геометрию через теорию групп	Общая теория относительности Эйнштейна базируется на римановой геометрии

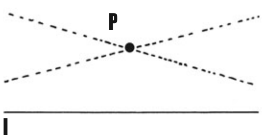
формулировку, обретшую популярность: для линии l и точки P, не лежащей на линии l, есть единственная прямая, проходящая через P и параллельная l. Примерно тогда же Адриен Мари Лежандр предложил еще одну версию — он доказал существование треугольника, сумма углов которого равна 180°.

Эти новые формулировки пятого постулата попытались как-то облегчить громоздкость исходной. Они оказались более приемлемыми, нежели неуклюжая версия Евклида.

С другой стороны, шла борьба за призрачное доказательство пятого постулата. Цель была невероятно притягательна: если бы удалось найти доказательство, постулат превратился бы в теорему и убрался с передовой. К сожалению, попытки довести дело до конца оказались блистательным примером порочного круга доказательства, т. е. аргументации, которая отталкивается в точности от того, что пытается доказать.

Неевклидова геометрия Прорыв удалось осуществить Карлу Фридриху Гауссу, Яношу Бойяи и Николаю Ивановичу Лобачевскому. Гаусс свою работу не опубликовал, но, похоже, выводы сделал еще в 1817 году. Бойяи издал свой труд в 1831-м, а Лобачевский, независимо от Гаусса и Бойяи, — в 1829-м, в результате чего между двумя последними возник диспут о первенстве открытия. Никаких сомнений гений этих троих не вызывает. Они доказали, что пятый постулат независим от первых четырех. Добавление к четырем первым постулатам отрицания, сформулированного в пятом, создавало возможность существования непротиворечивой системы.

Бойяи и Лобачевский построили новую геометрию, допустив, что линий, проходящих через точку P и не пересекающихся с l, может быть *более* одной. Ясное дело, линии, показанные пунктиром, пересекают l. Разделив эту убежденность, мы невольно присоединяемся к воззрениям Евклида. Чертеж — всего лишь уловка, а Бойяи и Лобачевский предложили новый вид геометрии, не подпадающий под Евклидов здравый смысл. По сути, их неевклидову геометрию можно представлять как геометрию на искривленной плоскости, которую еще называют псевдосферой.



Кратчайшее расстояние между двумя точками на псевдосфере играют ту же роль, что и прямые в евклидовой геометрии. Любопытное свойство неевклидовой геометрии заключается в том, что сумма всех углов в треугольнике *меньше* 180°. Такую геометрию называют гиперболической.

Другая альтернатива пятому постулату гласит, что любая линия, проходящая через P, пересекается с l. Иными словами, через P не проходит ни одной линии, «параллельной» l. Геометрия эта отличается от геометрии Бойяи и Лобачевского, но тем не менее это самая настоящая геометрия.

Одна из моделей – геометрия на поверхности сферы. В пределах этой геометрии большие круги (равные по длине самой сфере) играют роль прямых линий евклидовой геометрии. В этой разновидности неевклидовой геометрии сумма всех углов в треугольнике *больше* 180°. Такая геометрия называется эллиптической геометрией; ее связывают с именем немецкого математика Г. Ф. Б. Римана, занимавшегося ею в 1850-х годах.

Геометрию Евклида, считавшуюся единственно возможной – по словам Иммануила Канта, «вшитую в человека», – сбросили с пьедестала. Втиснутая между гиперболической и эллиптической, она стала одной из многих. Прочие версии геометрии объединили в 1872 году под общим зонтиком Феликса Клейна. Пришествие неевклидовой геометрии потрясло математику и проложило путь геометрии общей теории относительности Эйнштейна (см. стр. 192). Именно общая теория относительности требует новой геометрии – геометрии искривленного пространства-времени, или римановой. Теперь уже неевклидова геометрия, а не закон всемирного тяготения Ньютона объясняла, почему предметы падают на землю. Присутствие в пространстве таких массивных объектов, как Земля или Солнце, искривляет пространство-время. Стеклянный шарик на тонкой резиновой ткани лишь слегка ее промнет, а вы попробуйте положить на нее шар для боулинга – ее растянет будь здоров как.

Эта кривизна, измеренная в терминах римановой геометрии, предсказывает, как световые лучи искривляются в присутствии массивных пространственных объектов. Обычного евклидова пространства, в котором время – независимый компонент, недостаточно для общей теории относительности. Как минимум потому, что евклидово пространство плоское, в нем нет искривлений. Представьте лист бумаги, лежащий на столе, – можно с уверенностью сказать, что в любой точке этого листа искривление равно нулю. В основе риманова пространства-времени – концепция кривизны, которая еще и постоянно меняется: так кривизна смятой ткани варьирует от точки к точке. Все равно что смотреть в изогнутое кривое зеркало на ярмарке: отражение зависит от того, из какой точки в это зеркало заглянуть.

Неудивительно, что Гаусса в 1850-х так впечатлил юный Риман: он даже предположил, что Риман рано или поздно совершит переворот в «метафизике» пространства.

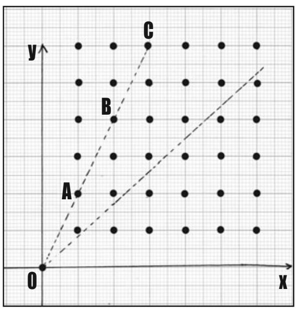
В сухом остатке: А что, если параллельные прямые все-таки пересекаются?

28 Дискретная геометрия

Геометрия — одно из старейших ремесел; это слово буквально означает измерение (*метрия*) земли (*гео*). Обычная геометрия изучает непрерывные линии и замкнутые фигуры — и те и другие можно считать совокупностью точек, расположенных «рядом» друг с другом. Дискретная математика имеет дело с целыми числами — в противоположность непрерывному ряду действительных чисел. Дискретная геометрия оперирует с конечным числом точек и линий или решетками точек: непрерывное заменяется на отдельно взятое.

Решетка или сетка – характерное множество точек, чьи координаты – целые числа. Такая геометрия формулирует интересные задачи и практически применима к таким разным областям жизни, как теория кодирования или разработка научных экспериментов.

Возьмем, к примеру, маяк, испускающий луч света. Предположим, луч света начинается в точке O и пролегает между вертикальной и горизонтальной осями. Можно задаться вопросом, какие лучи освещают какие узлы решетки (допустим, это лодки, стоящие в бухте на якоре в некотором довольно строгом порядке).



Точки решетки в осях x—y

Уравнение, описывающее этот луч, исходящий из начала координат, $y = mx$. Это уравнение прямой, проходящей через начало координат, с градиентом m. Если, предположим, луч описывается уравнением $y = 2x$, он пройдет через точку с координатами $x = 1$ и $y = 2$, поскольку эти значения удовлетворяют уравнению. Если луч проходит через точку решетки с координатами $x = a$ и $y = b$, градиент m – дробь b/a. Как следствие,

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

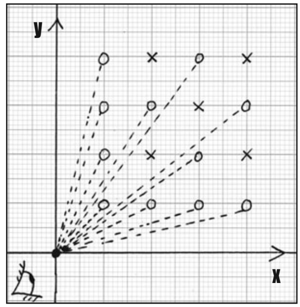
1639

Блез Паскаль в свои 16 лет формулирует теорему, получившую его имя

1806

Шарль Жюльен Брианшон формулирует теорему в пару к Паскалевой если m — не настоящая дробь (если она вдруг окажется равной $\sqrt{2}$, например), луч не пройдет ни через одну точку решетки.

Луч $y = 2x$ проходит через точку A с координатами $x = 1$ и $y = 2$, а вот до точки B с координатами $x = 2$ и $y = 4$ и до всех остальных «позади» A (например, C с координатами $x = 3$ и $y = 6$ или D с координатами $x = 4$ и $y = 8$) уже не доберется — они будут «в тени». Представить, что смотрим из точки начала отсчета и можем определить, какие точки нам видны, а какие скрыты.

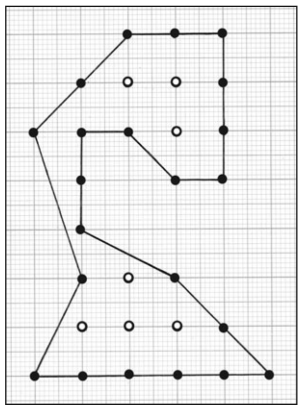


Точки ❍, «видимые» из начала координат, и затененные (×).

Можно показать, что точки, видимые нам, имеют координаты $x = a$ и $y = b$, которые являются взаимно простыми числами. Это точки с координатами типа $x = 2$ и $y = 3$, т. е., кроме 1, у них нет общих делителей. Точки позади этих имеют кратные координаты, например, $x = 4$ и $y = 6$ или $x = 6$ и $y = 9$ и т. д.

Теорема Пика У австрийского математика Георга Пика — две заявки на славу. Во-первых, он был близким другом Альберта Эйнштейна и в 1911 году помог юному ученому устроиться в Немецкий университет в Праге. А во-вторых, написал небольшую статью по «сетчатой» геометрии, изданную в 1899 году. Из всей работы его жизни, из трудов в широком диапазоне тем он памятен очаровательной теоремой Пика — о, какая это теорема!

Теорема Пика позволяет рассчитывать площадь внутри многосторонней (или многоугольной) фигуры, образованной соединенными точками, чьи координаты — целые числа. Это математика пинбола.



Многосторонняя (многоугольная) фигура

Чтобы вычислить эту площадь, нам нужно посчитать количество точек ● на границе фигуры и число внутренних точек ❍. В нашем примере число точек на границе $b = 22$, а внутренних $c = 7$. Это все, что нам нужно для работы с теоремой Пика:

$$\text{площадь} = b/2 + c - 1.$$

Из этой формулы получаем, что площадь $= {}^{22}/_{2} + c - 1 = 17$ квадратных единиц. Вот так просто. Теорема Пика применима к любой фигуре, составленной из отдельных точек с координатами в виде целых чисел. Единственное условие: фигура не должна пересекать саму себя.

1846

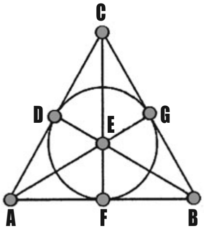
Томас П. Киркман (Кёркмен) предвосхищает создание системы Штейнера

1892

Джино Фано конструирует плоскость, названную позднее в его честь, — как простейший пример проективной геометрии

1899

Георг Пик обнародует свою теорему о площади многоугольников



Плоскость Фано

Плоскость Фано Геометрия Фано на плоскости была открыта почти одновременно с теоремой Пика, но ни с какими измерениями не связана. Плоскость, названная в честь итальянского математика Джино Фано, первоисследователя конечной геометрии, — простейший пример «проективной» геометрии. Эта плоскость состоит всего из семи точек и семи линий.

Семь точек названы *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* и *G*. Шесть линий видно сразу, а где же седьмая? Свойства этой геометрии и особенностей построения диаграммы обязывают нас отнестись к *DFG* как к седьмой линии: это круг, проходящий через точки *D*, *F* и *G*. Проблем здесь нет никаких, поскольку в дискретной геометрии линии не обязаны быть «прямыми» в привычном смысле слова.

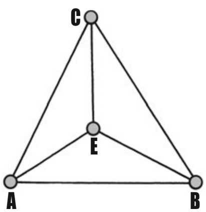
У этой маленькой геометрии много свойств, например:

– каждая пара точек определяет линию, проходящую через обе точки пары,
– каждая пара линий определяет точку, лежащую на обеих.

Эти два свойства иллюстрируют замечательную двойственность, проявляющуюся в таких геометриях. Второе свойство есть первое, только слова «точка» и «линия» поменялись местами; верно и обратное: первое свойство есть второе с аналогичной переменой мест.

Если в любом истинном утверждении поменять местами два слова и слегка подогнать фразу половчее, у нас тоже получится истинное утверждение. Проективная геометрия очень симметрична. Евклидова не такова. В ней есть параллельные прямые — пара никогда не пересекающихся прямых. В пределах евклидовой геометрии мы можем запросто говорить о параллельности. В проективной геометрии это не пройдет: здесь любая пара прямых непременно пересекается. Для математиков это означает, что евклидова геометрия — рангом ниже.

Если с плоскости Фано убрать одну линию и все ее точки, мы вновь окажемся в несимметричном пространстве евклидовой геометрии с параллельными прямыми. Представим, что мы убрали и «круговую» линию *DFG*, и получим евклидов рисунок.



Плоскость Фано, превращенная в евклидову

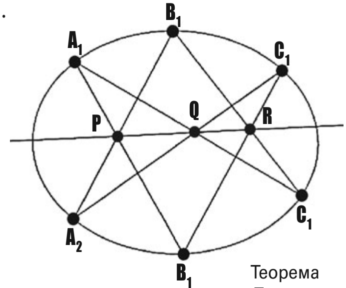
Стало на одну линию меньше — т. е. шесть: *AB*, *AC*, *AE*, *BC*, *BE* и *CE*. Теперь есть пары «параллельных» линий, а именно *AB* и *CE*, *AC* и *BE*, *BC* и *AE*. Линии эти параллельны в том смысле, что у них нет точек пересечения.

Плоскость Фано занимает культовое место в математике — из-за своих связей с большим количеством других концепций и практических приложений.

Это один из ключей к задаче Томаса Киркмана о школьницах (см. стр. 167). В теории разработки экспериментов плоскость Фано проявляется замаскированно – в виде системы Якоба Штейнера (Штайнера). Если дано конечное число n объектов, система Штейнера позволяет разделить их на множества по три так, что любая пара из этих n объектов окажется лишь в одном блоке. В случае 7 объектов A, B, C, D, E, F и G блоки в системе Штейнера соответствуют линиям плоскости Фано.

A	*F*	*B*
B	*G*	*C*
C	*F*	*D*
D	*B*	*E*
E	*C*	*F*
F	*D*	*G*
G	*E*	*A*

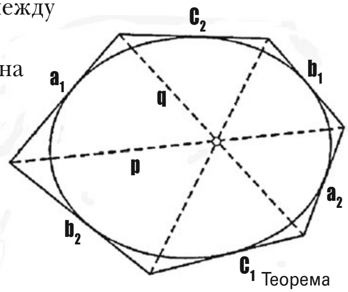
Пара теорем Теорема Паскаля и теорема Брианшона находятся на границе непрерывной и дискретной геометрий. Они разные, но взаимосвязаны. Первая была сформулирована Блезом Паскалем в 1639 году, когда ему было всего 16 лет. Возьмем растянутый круг, называемый эллипсом (см. стр. 89), и отметим на нем шесть точек – A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2. Назовем P точку пересечения A_1B_2 и A_2B_1; Q – точку пересечения A_1C_2 и A_2C_1; R – точку пересечения B_1C_2 и B_2C_1. Теорема гласит, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.



Теорема Паскаля

Теорема Паскаля выполняется независимо от положения точек на эллипсе. На самом деле, вместо эллипса можно взять вообще любое коническое сечение – гиперболу, окружность, параболу или даже пару прямых (в этом случае получающаяся конфигурация называется «колыбелью для кошки»), а теорема по-прежнему будет верна.

Свою теорему французский математик и химик Шарль Жюльен Брианшон открыл существенно позже. Изобразим шесть касательных к эллипсу и назовем их a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2. Далее определим три диагонали – линии p, q, r – следующим образом: p – линия между точками, в которых стыкуются a_1 с b_2 и a_2 с b_1; q – линия между точками, в которых стыкуются a_1 с c_2 и a_2 с c_1; r – линия между точками, в которых стыкуются b_1 с c_2 и b_2 с c_1. Теорема Брианшона утверждает, что такие линии p, q и r пересекаются в одной точке.



Теорема Брианшона

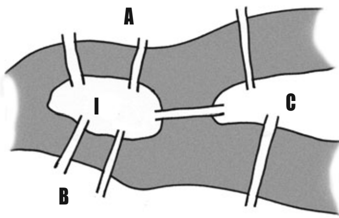
Эти две теоремы дополняют друг друга – вот нам еще один пример парности теорем проективной геометрии.

В сухом остатке: Отдельные достопримечательные точки

29 Графы

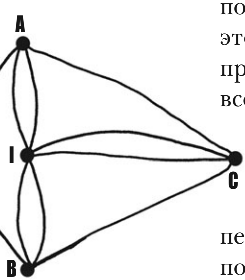
В математике есть два типа графов. В школе мы чертим кривые, отражающие отношения между переменными *x* и *y*. Позднее появляется вид кривых поновее — это точки, соединенные извилистыми линиями.

Кенигсберг – город в Восточной Пруссии, знаменитый семью мостами над рекой Прегель. Этот город – родина блистательного философа Иммануила Канта, однако мосты его связаны со знаменитым математиком Леонардом Эйлером.



В XVIII веке возник любопытный вопрос: можно ли обойти весь Кенигсберг, прошагав по каждому мосту лишь однажды? Прогулка, положим, не обязана закончиться в той же точке, где мы ее начали, важно лишь, что по каждому мосту мы проходим один раз.

В 1735 году Эйлер предложил решение этой задачи Российской академии наук, и теперь уже ясно, что оно положило начало теории графов. На нашем полуабстрактном рисунке остров посреди реки обозначен буквой *I*, а берега реки – буквами *A*, *B* и *C*. Сможете спланировать воскресный променад так, чтобы вам пришлось переходить реку по каждому мосту лишь один раз? Берите карандаш и пробуйте. Ключевой шаг – отбросить полуабстрактность и погрузиться в полную абстрактность. Произведя это мысленное усилие, получим систему точек и линий. Земля представлена «точками», а мосты, их соединяющие, – «линиями». Нам все равно, что линии не прямые или различаются по длине. Это все не важно. Важны лишь связи между ними.



Эйлер заметил, что именно способствует успеху такой прогулки. Если не считать начало и конец маршрута, когда мы всякий раз переходим тот или иной мост и оказываемся на берегу, необходимо покинуть этот берег по ранее нехоженому мосту.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1735

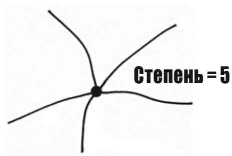
Эйлер решает задачу о мостах в Кенигсберге

1874

Карл Шорлеммер находит связь между химией и «деревьями»

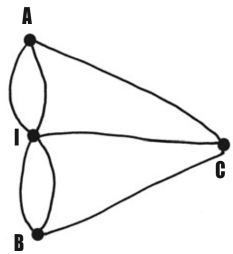
Переведя эту мысль в абстрактный рисунок, можем сказать, что линии, пересекающиеся в той или иной точке, должны быть парными. Помимо двух точек, символизирующих начало и конец маршрута, мост можно перейти только в том случае, если в каждой точке сходится четное количество линий.

Число линий, встречающихся в одной точке, называется «степенью» этой точки (вершины).



Теорема Эйлера гласит:

Мосты города можно перейти в точности по одному разу, если три и более точек имеют четную степень.



Глядя на граф, описывающий Кенигсберг, мы видим, что каждая точка имеет нечетную степень. Это означает, что в этом городе обойти все мосты всего лишь по разу не получится. Если изменить систему мостов, вероятно, такая прогулка и станет возможной. Если построить еще один мост между островом *I* и *C*, степени *I* и *C* станут четными. Это означает, что мы могли бы начать прогулку в точке *A* и завершить ее в *B*, пройдя по каждому мосту единожды. А если построить еще один мост — между *A* и *B* (см. справа), — гулять можно откуда угодно и даже вернуться в *то же* место, потому что в этом случае у всех точек будет четная степень.

Лемма о рукопожатиях Если бы нас попросили изобразить граф, в котором содержатся 3 вершины нечетных степеней, нам бы пришлось туго. Попробуйте сами. Эту задачу решить нельзя, потому что:

В любом графе число вершин нечетной степени должно быть четным.

Это так называемая лемма о рукопожатиях — первая в теории графов. В любом графе у каждой линии должны быть начало и конец, иными словами — для рукопожатия нужны двое.

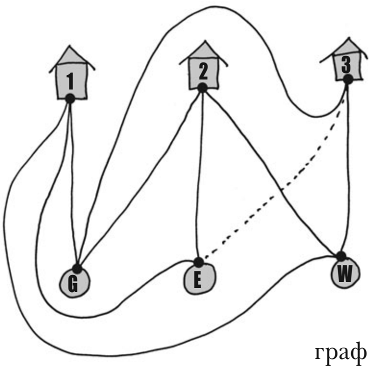
Если в графе увеличивать каждой вершине степень, нам нужно четное число вершин, скажем, N. Дальше предположим, что у нас x вершин нечетной степени и y вершин — четной. Сложив все степени всех нечетных вершин, получим N_x, а сложив степени всех

1930 Казимир Куратовский доказывает теорему о планарных графах

1935 Дьёрдь Пойа разрабатывает алгебраические методики расчета графов

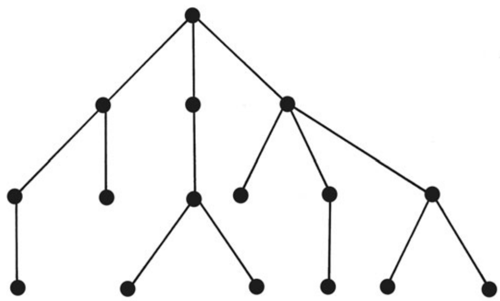
1999 Эрик Рейнз и Нил Слоун развивают подсчет деревьев четных вершин, получим N_y, которое будет четным. Таким образом, $N_x + N_y = N$, а значит, $N_x = N - N_y$. Из этого следует, что N_x – четное. Но само x не может быть нечетным, поскольку сумма двух нечетных чисел – четная. Следовательно, x обязано быть четным.

Непланарные графы Задача о коммунальном обслуживании стара как мир. Вообразим три дома и три коммунальные потребности – в газе, электричестве и воде. Нам нужно обеспечить каждый дом всеми тремя удобствами, но есть одна загвоздка: коммуникации не должны пересекаться.



Оказывается, это нереализуемо – но можете поэкспериментировать на своих ни о чем не подозревающих друзьях. Граф, описываемый соединением одних трех точек с другими тремя всеми возможными способами (всего девятью линиями), не может быть изображен на плоскости без пересечения линий. Такой граф называется непланарным. Граф коммунальных услуг и домов – равно как и граф, состоящий из всех возможных линий, соединяющих пять вершин, – занимает особое место в теории графов. В 1930 году польский математик Казимир Куратовский доказал поразительную теорему: граф планарен тогда и только тогда, когда не содержит графы из трех и пяти вершин в качестве подграфов – меньших графов, включенных в основной, больший.

Деревья «Дерево» – особый вид графа, сильно отличающийся от графа «удобств» или от кенигсбергского. В задаче о кенигсбергских мостах была возможность начать в одной точке и вернуться к ней другим маршрутом. Такой маршрут из точки и обратно сам по себе называется циклом. Дерево – связный граф без циклов.



Знакомый пример графа-дерева – организация папок в компьютере. Они выстроены иерархически, с корневой директорией и расходящимися поддиректориями. Поскольку цикла в таком графе нет, перейти с одной ветки на другую можно, лишь вернувшись в корневую директорию – маневр, знакомый любому пользователю компьютера.

Считаем деревья Сколько разных деревьев можно соорудить из заданного количества точек? Задача о подсчете деревьев была решена в XIX веке английским математиком Артуром Кэли. Например, существует в точности три разных дерева, состоящих из пяти точек:

Кэли смог посчитать число разных деревьев для небольшого количества точек. Ему удалось разобраться с деревьями, в которых до 14 точек, после чего человеку без компьютера стало непосильно возиться с такими числами. С тех пор расчеты продвинулись – нам известно количество деревьев, которые можно построить аж из 22 точек. Их миллионы.

Даже для своего времени исследования Кэли имели практическое применение. Расчет деревьев имеет значение для химии: некоторые вещества различаются лишь тем, как у них организованы атомы внутри молекулы. Вещества с одним и тем же числом атомов, организованных по-разному, имеют разные химические свойства. Применение анализа Кэли сделало возможным открыть некоторые химические вещества «на бумаге», а потом выделить их в лаборатории.

В сухом остатке: По мостам — к деревьям

30 Задача четырех красок

Кто именно подарил Малютке Тиму на Рождество четыре восковых карандаша разных цветов и нераскрашенную карту Англии? Может, сосед-картограф, который время от времени присылал маленькие сувениры, или чудак-математик Огастес Де Морган, живший неподалеку: они с отцом Тима перебрасывались словцом-другим. Но уж точно не мистер Скрудж.

Крэтчиты обитали в неказистом безликом домике на Бэйэм-стрит, Кэмден-таун, к северу от недавно открывшегося Университетского колледжа, где Де Морган служил преподавателем. Даритель стал бы очевиден, зайди в новом году профессор к Крэтчитам посмотреть, как Малютка Тим раскрасил подаренную карту.

У Де Моргана уж точно были соображения, как именно это можно сделать: «Раскрась карту так, чтобы две соседние провинции с общей границей были всегда разных цветов».

«Но мне не хватит красок», – возразил бы Тим не задумываясь. Де Морган улыбнулся бы и предоставил мальчишке решать эту задачку самостоятельно. Совсем недавно один из его студентов, Фредерик Гутри, задал ему вопрос на эту же тему и помянул успешно раскрашенную карту Англии – всего четырьмя цветами. Задача подстегнула математическое воображение Де Моргана.

А можно ли раскрасить любую карту всего четырьмя цветами так, чтобы все области были различимы? Картографы, вероятно, были в этом убеждены веками, но получится ли точное доказательство? Представим любую карту в мире, кроме Англии: например,

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1852
Фредерик Гутри, студент Де Моргана, формулирует задачу своему наставнику

1879
Считается, что Алфред Кемпе решил задачу

1890
Перси Хивуд обнаруживает ошибки в доказательстве Кемпе и доказывает теорему пяти красок

американские штаты или французские департаменты, — или даже вымышленные карты, составленные из условных областей и границ. Трех цветов, однако, не хватит.

Западные штаты Америки

Вглядимся в карту западных штатов Америки. Располагая только синим, зеленым и красным, можно, к примеру, начать с Невады и Айдахо. Не имеет значения, каким цветом: можем назначить синий для Невады и зеленый — для Айдахо. Ну допустим. Значит, Юту *придется* раскрасить красным, Аризону, в свою очередь, зеленым, Калифорнию красным, Орегон — снова зеленым. Получается, Орегон и Айдахо — оба зеленые и сливаются. А вот будь у нас четыре краски — еще желтый, — можно было бы им раскрасить Орегон, и тогда все бы вышло отлично. Так достаточно ли этих четырех красок — синей, зеленой, красной и желтой — для *любой* карты? Этот вопрос известен под названием задачи четырех красок.

Масштабы задачи За 20 лет после того, как Де Морган осознал существенность этой задачи, она стала знаменита в математических кругах Европы и Америки. В 1860-х американский философ и математик Чарлз Сэндерз Пирс считал, что доказал решение этой задачи, однако не оставил об этом никаких свидетельств.

Задача получила еще больший резонанс благодаря ученому-викторианцу Фрэнсису Гальтону. Он усмотрел в этой задаче возможности саморекламы и в 1878 году завлек знаменитого кембриджского математика Артура Кэли к написанию соответствующей статьи. Увы, Кэли вынужден был признать, что ему не удалось сформулировать доказательство, но он отметил, что достаточно рассмотреть лишь кубические карты (такие, где в точности три области сходятся в одной точке). Это соображение подтолкнуло его ученика Алфреда Брея Кемпе попытаться найти решение задачи. Лишь год спустя Кемпе объявил, что нашел доказательство. Кэли сердечно поздравил его, доказательство было опубликовано, и Кемпе избрали в Лондонское королевское общество.

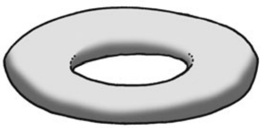
А что же дальше? Доказательство Кемпе оказалось длинным и довольно громоздким, и кое-кто остался им не удовлетворен, но тем не менее оно в целом было принято. То-то все удивились, когда десять лет спустя Перси Хивуд из Дарэма нашел пример карты, показавший слабину доказательства Кемпе. Свое доказательство Хивуд предложить не смог, однако продемонстрировал, что задача четырех красок по-прежнему не решена. Для математиков это означало возвращение

1976

Кеннет Аппель и Вольфганг Хакен предлагают компьютерный способ доказательства общего результата

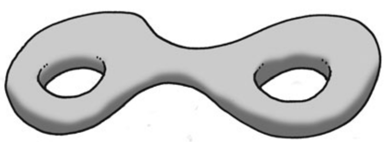
1994

Компьютерное доказательство упрощено, однако остается компьютерным к рисованию – и возможность прорыва для новичков. Применив некоторые методы Кемпе, Хивуд доказал теорему пяти красок: любую карту можно раскрасить пятью цветами. Этот результат был бы вполне замечателен, сконструируй кто-нибудь карту, которую нельзя было бы раскрасить в четыре краски. Итак, ученые уперлись в трудноразрешимый вопрос: все-таки четыре или пять?



Простой пончик, или «тор»

Исходная задача о четырех красках касалась карт, нарисованных на плоской или сферической поверхности. А если взять карты, нанесенные на поверхность типа пончика – куда более интересную математикам из-за формы, нежели из-за вкуса. Для такой поверхности Хивуд доказал: необходимо и достаточно семь красок, чтобы нанести на нее любую карту. Он даже доказал результат для пончика с многими дырками (с числом отверстий h), для которого сосчитал количество цветов, гарантирующих карте полноцветность, хотя не сумел доказать, что это необходимый минимум. Таблица с некоторыми Хивудовыми результатами такова:



Тор с двумя дырками

Число отверстий, h	1	2	3	4	5	6	7	8
Достаточное количество цветов, C	7	8	9	10	11	12	12	13

В общем случае $C = [{}^1/_2(7 + \sqrt{(1 + 48h)})]$. Квадратные скобки указывают, что можно брать лишь целочисленные значения заключенного в них члена уравнения. Например, для $h = 8$, $C = [13{,}3107\ldots] = 13$. Формула Хивуда была выведена с условием, что h (число отверстий) строго больше нуля. Формула дает искушающий ответ $C = 4$, если подставить запрещенное значение $h = 0$.

Решена ли задача? Даже через полвека после того, как в 1852 году задача возникла впервые, ее не решили. В XX веке мыслительная сила мировой математической элиты по-прежнему оставалась посрамленной.

Кое-какого прогресса все же удалось добиться: один математик доказал, что четырех красок хватит для карты, на которую нанесено до 27 стран, другому удалось улучшить этот результат до 31 страны, а третьему – до 35. Это отщипывание по кусочку могло бы продолжаться вечно. На самом деле выводы, сделанные Кемпе и Кэли в их первых трудах, указывали лучший путь к успеху, и математики обнаружили, что надо лишь проверить конфигурации некоторых карт и убедиться, что и четырех красок им хватит. Неувязка заключалась в том, что карт таких было множество – на ранних стадиях попыток доказательства их были тысячи. Такую проверку вручную не произведешь, однако, к счастью, немецкий математик Вольфганг Хакен, трудившийся над задачей долгие годы, смог привлечь к работе американского математика и компьютерного гения Кеннета Аппеля. Блестящие методы сократили число конфигураций карт до 1500. К концу июня 1976 года, после многих бессонных ночей, дело оказалось в шляпе – вместе со своим верным компьютером «Ай-би-эм-370» ученые проникли в великую тайну.

У факультета математики Университета Иллинойса возник новый повод для ликования. Они заменили свою почтовую марку «наибольшее известное простое число» на новую – «четырех красок хватит». Местным гордости было хоть отбавляй, а что же мировое математическое сообщество? Это же, в конце концов, та самая задача, перед которой все преклонялись и которую мог понять любой даже в нежном возрасте Малютки Тима, однако целый век она дразнила и мучила величайших математиков своего времени.

Аплодисменты тем не менее оказались довольно жидкими. Кое-кто, пусть и неохотно, принял полученный результат, но многие отнеслись скептически. А все потому, что доказательство получилось компьютерное: этот прием вне традиционной формы математической аргументации. Никто и не сомневался, что доказательство простым не будет и получится длинным, но компьютерное доказательство – уже перебор. Оно ставит вопрос о «проверяемости». Кому под силу выверить тысячи строк программного кода, от которых это доказательство зависит? Могут же и в программирование затесаться ошибки. Одной бы хватило, чтобы все пошло прахом.

Но и это еще не все. Доказательству не хватало «ага»-фактора. Как вообще продраться через доказательство и оценить красоту решения или прочувствовать ключевую часть аргументации – тот самый момент «ага!»? Одним из суровейших критиков этого доказательства оказался почтенный математик Пол Халмош. Он считал, что компьютерному доказательству можно верить так же, как именитой гадалке. Но все-таки достигнутый результат признали многие, и человек, который пожелает потратить свое бесценное время исследований на поиск контрпримера карты, требующей пяти красок, будет либо глупцом, либо героем. Заниматься этим стоило до Аппеля и Хакена, но не после.

После доказательства С 1976 года количество конфигураций карт, которые необходимо проверить, сократилось вдвое, а компьютеры стали и быстрее, и мощнее. Что ж, математический мир все еще ждет компактного доказательства в традиционном стиле. Тем временем задача четырех красок породила другие важные задачи в теории графов и попутно бросила вызов самому понятию математического доказательства.

В сухом остатке: Четырех красок хватит

31 Вероятность

Насколько возможен завтра снегопад? Какие у меня шансы успеть на утренний поезд? Какова вероятность выиграть в лотерею? Возможность, шанс, вероятность — эти слова мы произносим ежедневно, если нам нужен ответ. Они же — термины математической теории вероятности.

Теория вероятности — важная теория. Она имеет дело с неопределенностью, в оценке рисков без нее никуда. Но как можно выразить теорию количественно, если она описывает неопределенность? В конце концов, математика — точная наука.

Задача на самом деле состоит именно в том, чтобы *количественно* определить вероятность.

Возьмем самый простой пример на свете — подбросим монету. Какова вероятность, что выпадет «орел»? Что тут думать — ответ $^1/_2$ (ее еще записывают в виде 0,5 или 50%). Глядя на монету, мы делаем допущение, что это симметричная монета, т. е. вероятность выпадения «орла» равна вероятности выпадения «решки», следовательно, вероятность «орла» — $^1/_2$.

Задачки с монетами, шарами в ящиках и «механические» примеры — довольно лобовые. Для определения вероятности существуют две основные теории. Принятие во внимание двухсторонней симметричности монеты — один подход. Другой — оценка относительной частотности: мы проводим эксперимент очень много раз и считаем, сколько «орлов» нам выпадет. Но «много» раз — это сколько? Легко поверить, что количество выпадений «орлов» относительно «решек» — примерно 50 : 50, но эта пропорция могла бы измениться, продолжи мы эксперимент.

А как быть со здравым измерением вероятности завтрашнего снегопада? Тут вроде бы тоже всего две возможности: либо снег пойдет, либо нет, но совсем не ясно, равны ли шансы обоих исходов, как это было бы с монетой.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 1650

Блез Паскаль и Христиан Гюйгенс (Хёхенс) закладывают основы теории вероятности

1785

Маркиз де Кондорсе применяет вероятностный подход к анализу судебной и выборной системы

При оценке вероятности завтрашнего снегопада придется принять во внимание погодные условия в данный момент и тьму других факторов. Но даже с учетом чего угодно не выйдет точно определить значение этой вероятности. Хорошо, допустим, точное число мы назвать не сможем, но ведь можно хотя бы выдать определенную «степень уверенности», т. е. что вероятность низкая, средняя или высокая. В математике вероятность измеряется по шкале от 0 до 1. Вероятность невозможного события равна 0, а совершенно определенного — 1. Вероятность 0,1 — низкая, а 0,9 — высокая.

Происхождение вероятности Математическая теория вероятности вышла на первый план в XVII веке — в дискуссиях об игре в кости между Блезом Паскалем, Пьером Ферма и Антуаном Гомбо (также известным как шевалье де Мере). Они обнаружили, что эта незатейливая игра — штука хитрая. Вопрос, поставленный шевалье де Мере, сводился к тому, что́ более вероятно: выбросить шесть очков в четыре броска одной кости или «двойную шестерку» за 24 броска двумя костями? А вы бы за какой вариант свою рубаху на кон поставили?

В те времена считалось, что лучше ставить на двойную шестерку, поскольку в этом варианте допустимо больше бросков. Этот подход был развенчан, когда произвели оценку вероятностей. Вот эти расчеты:

Бросаем одну кость: вероятность *не* выбросить шестерку за один ход — $^5/_6$, а за четыре хода эта вероятность $^5/_6 \times {}^5/_6 \times {}^5/_6 \times {}^5/_6$, т. е. $(^5/_6)^{\mathbf{4}}$. Поскольку результаты разных ходов друг на друга не влияют, они «независимые», и вероятности можно перемножать. Вероятность выпадения как минимум одной шестерки, таким образом:

$$1 - (^5/_6)^{\mathbf{4}} = 0{,}517746.$$

Бросаем две кости: вероятность *не* выбросить двойную шестерку за один ход — $^{35}/_{36}$, а за 24 хода – $(^{35}/_{36})^{\mathbf{24}}$.

Следовательно, вероятность выбросить двойную шестерку

$$1 - (^{35}/_{36})^{\mathbf{24}} = 0{,}491404.$$

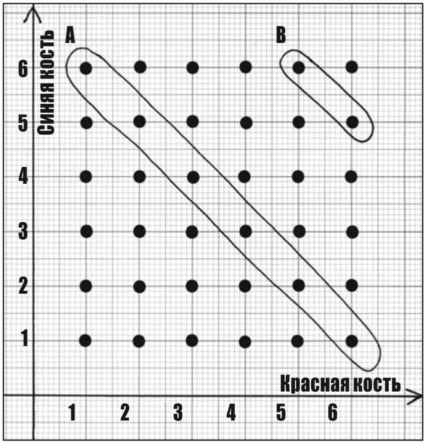
Поиграем с этим примером еще немного.

Сыграем в крэпс Пример с двумя костями — основа современной игры в крэпс (и в казино, и онлайн). Если бросить две отличные друг от друга кости (красную и синюю), возможны 36 разных исходов, которые можно записать парами (x, y) и изобразить в виде 36 точек в осях x–y — такая картинка называется «выборочным пространством» (пространством элементарных событий).

1812
Пьер-Симон де Лаплас издает два тома «Аналитической теории вероятностей»

1912
Джон Мейнерд Кейнс (Кэйнз) публикует «Трактат о вероятности», повлиявший на его теории экономики и статистики

1933
Андрей Николаевич Колмогоров предлагает аксиоматику вероятности



Выборочное пространство (для двух костей)

Рассмотрим событие A – выпадение на костях суммы 7. Всего есть 6 комбинаций, и каждая дает нам 7; значит, событие A можем записать так:

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

и обозначим это на рисунке. Вероятность A – 6 шансов из 36, что можно записать как $P(A) = 6/36 = 1/6$. Если B – вероятность выпадения суммы в 11 очков, то $B = \{(5,6), (6,5)\}$, а $P(B) = 2/36 = 1/18$.

В крэпсе – игре, где бросают две кости разом, – можно выиграть или проиграть на первом же ходе, но некоторые значения счета не являются проигрышем, и можно получить второй. Выигрыш в первом же ходе – это событие A или B; если происходит одно или второе, это называют *«natural»* (англ., в том числе «самородок»). Вероятность *«natural»* рассчитывается суммированием двух отдельных вероятностей: $6/36 + 2/36 = 8/36$. Вы проигрываете на первом же ходе, если выкидываете 2, 3 или 12 (такие суммы очков называют *«craps»*, т. е. «барахло»). Если произвести расчеты, аналогичные ранее приведенным, получим вероятность проигрыша в первом ходе 4/36. Если выпадает сумма 4, 5, 6, 8, 9 или 10, вы участвуете во втором круге – с вероятностью $24/36 = 2/3$.

В мире казино вероятности называют «шансами». В крэпсе на каждые 36 сыгранных вами игр на выигрыш в первом броске будет приходиться в среднем 8 игр, на невыигрыш – 28, т. е. шансы против вашего выигрыша на первом броске 28 к 8, или 3,5 к 1.

Мартышка и пишущая машинка Алфред – мартышка, он живет в местном зоопарке. У него есть старенькая пишущая машинка с 26 клавишами для букв латинского алфавита, одна – с точкой, одна – с запятой, одна – с вопросительным знаком и один пробел; итого 30 клавиш. Сидит себе Алфред в углу, весь преисполненный литературных амбиций, но у него любопытный писательский стиль – он лупит по клавишам наобум.

Любая последовательность букв имеет ненулевую вероятность оказаться напечатанной, а значит, есть шанс, что Алфред дословно напечатает пьесы Шекспира.

Более того, есть вероятность (хоть она и меньше), что Алфреду удастся перейти к переводу на французский, потом на испанский, а затем и на немецкий. Ну и вдобавок допустим еще возможность, что Алфред дополнит свою работу стихотворениями

Уильяма Водсворта. Шансы у нашей мартышки минимальные, но они точно отличны от нуля. И вот в этом все дело. Давайте разберемся, сколько времени понадобится Алфреду, чтобы напечатать монолог из «Гамлета», начиная со слов *«To be or»* («Быть иль не»). Представим 8 ячеек, в которых окажутся 8 знаков, включая пробелы:

T	o		b	e		o	r

Число возможных вариантов для первой ячейки – 30, для второй – 30 и т. д. Таким образом, число способов, которыми можно заполнить 8 ячеек: $30 \times 30 \times 30 \times 30 \times 30 \times 30 \times 30 \times 30$. Шансы Алфреда добраться до конца *«To be or»* – 1 из 6561×10^{11}. Если Алфред бьет по клавише раз в секунду, можно ожидать, что на *«To be or»* у него уйдет около 20 000 лет, и наша мартышка окажется выдающимся приматом-долгожителем. Поэтому если вы затаили дыхание в ожидании Шекспира – выдыхайте. У Алфреда довольно долго будет получаться всякая белиберда типа *«xo,h?yt?»*.

Как развивалась теория? Применение теории вероятности может давать противоречивые результаты, но все-таки математические подпорки довольно крепки. В 1933 году Андрей Николаевич Колмогоров сделал важное дело – определил вероятность на аксиоматическом уровне: практически так же, как некогда, тысячелетиями ранее, такие определения появились в геометрии.

Вероятность определяется следующими аксиомами:

1. Вероятность всех возможных событий равна 1.
2. Значение вероятности больше либо равно нулю.
3. Если события не могут совпасть, их вероятности можно складывать.

Из этих аксиом, облаченных в технические термины, можно вывести математические свойства вероятности. Понятие вероятности имеет широкую применимость. Современная жизнь в значительной мере без нее немыслима. Оценка рисков, спорт, социология, психология, техническое проектирование, финансы и многое другое – список бесконечен. Кто бы мог подумать, что размышления XVII века об игральных костях перерастут в целую громадную дисциплину? Какова была вероятность такого исхода?

В сухом остатке: Тайны азартных игроков

32 Теория Байеса

О ранних годах жизни преподобного Томаса Байеса нам мало что известно. Он родился на юго-востоке Англии примерно в 1702 году и стал священником-нонконформистом, а заодно заработал репутацию математика и был избран в 1742 году в Лондонское королевское общество. Знаменитая работа Байеса «Очерки к решению задач в учении о случае» была опубликована в 1763-м — через два года после смерти автора. В ней приводилась формула для нахождения обратной вероятности, вероятности «наоборот», и с ее помощью была развита ключевая концепция байесовской философии — условная вероятность.

Томас Байес дал имя байесовцам — приверженцам особой разновидности статистики, в противовес традиционным статистикам, или «частотникам». Сторонники частотного подхода к вероятностям придерживаются взглядов на вероятность, основанных на упрямых численных данных. Байесовский подход базируется на знаменитой формуле Байеса и на принципе, что с субъективной степенью уверенности можно обращаться, как с математической вероятностью.

Условная вероятность Вообразите: бравому доктору Почему необходимо диагностировать корь у своих пациентов. Сыпь — показатель, но диагноз по ней впрямую не ставят. У пациента может быть корь без сыпи, а у некоторых — сыпь без кори. Вероятность того, что у пациента сыпь, *при условии* наличия у него кори, и есть условная вероятность. Байесовцы в своих записях изображают это самое «при условии» вертикальной линией:

P(у пациента сыпь | у пациента корь),

и это означает вероятность, что у пациента сыпь при условии, что у него корь. Значение P(у пациента сыпь | у пациента корь) не то же самое,

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1763
Изданы очерки Томаса Байеса о вероятности

1937
Бруно де Финетти настаивает на субъективном подходе к вероятности как на альтернативе «частотному» подходу

что P(у пациента корь | у пациента сыпь). Относительно друг друга эти вероятности обратны. Формула Байеса предназначена для расчетов одной вероятности через другую.

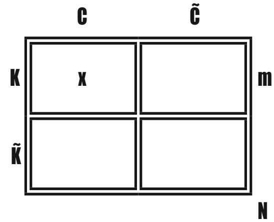


Диаграмма Венна, показывающая логическую структуру появления сыпи и наличия кори

Математики обожают условные обозначения реальных вещей. Скажем, событие наличия кори обозначается K, а событие наличия у пациента кори – C. Символ $\widetilde{C}$ – событие, при котором у пациента *нет* сыпи, и $\widetilde{K}$ – событие, при котором у пациента *нет* кори. Все это отражено в диаграмме Венна.

Из этой диаграммы доктор Почему видит, что есть x пациентов с корью и сыпью, m пациентов с корью, а общее число пациентов – N. Ему также понятно следующее: вероятность того, что некто болеет корью и покрыт сыпью, – попросту x/N, а вероятность того, что некто болеет корью, – m/N. Условная вероятность – вероятность того, что у кого-то сыпь, при условии, что у этого человека корь, записанная $P(C \mid K)$, равна x/m. Сведя все вместе, доктор Почему получит вероятность того, что некто и болеет корью, и покрыт сыпью:

$$P(K \text{ и } C) = \frac{x}{N} - \frac{x}{m} \times \frac{m}{N}$$

или

$$P(K \text{ и } C) = P(C \mid K) \times P(K)$$

и, сходно,

$$P(K \text{ и } C) = P(K \mid C) \times P(C).$$

Формула Байеса Приравнивая выражения для $P(K \text{ и } C)$, получаем формулу Байеса – отношение между условной вероятностью и ее противоположностью. Доктор Почему получит уверенное представление о $P(K \mid C)$ – вероятности наличия сыпи при наличии кори. Условная вероятность обратного события – как раз того, которое интересует доктора Почему больше, – есть ли у пациента корь, если у него сыпь. Установить это означает решить обратную задачу, и именно ее решал Байес в своих работах. Чтобы вычислить вероятность, нужно вбросить кое-какие цифры. Они будут субъективными, но нам важно увидеть, как это работает. Вероятность того, что, если у пациента корь, у него есть сыпь, $P(C \mid K)$, – довольно высока; допустим, это 0,9; если у пациента нет кори, вероятность сыпи – $P(C \mid \widetilde{K})$ – окажется низкой; допустим, 0,15.

$$P(K \mid C) = \frac{P(K)}{P(C)} \times P(C \mid K)$$

Формула Байеса

1950
Джимми Сэвидж и Деннис Линдли возглавляют современное байесовское движение

1950-е
Термин «байесовский» входит в оборот

1992
Основано Международное общество байесовского анализа

В обеих ситуациях доктор Почему сможет с приличной точностью оценить значения этих вероятностей. Бравый доктор также сможет прикинуть процент людей среди населения, у которых есть корь, – допустим, их 20%. Эта вероятность записывается как $P(K) = 0{,}2$.

Нам еще нужна лишь одна цифра – $P(C)$, т. е. процент людей среди населения, у которых сыпь. Итак, вероятность того, что у кого-то сыпь, есть вероятность того, что у кого-то корь и сыпь плюс вероятность того, что у кого-то кори нет, а сыпь есть. Исходя из нашего ключевого выражения, $P(C) = 0{,}9 \times 0{,}2 + 0{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}3$. Подставляем все значения в формулу Байеса:

$$P(K \mid C) = \frac{0{,}2}{0{,}3} \times 0{,}9 = 0{,}6.$$

Таким образом, из всех своих пациентов с сыпью врач правильно определяет корь в 60% случаев. Допустим, врач получает больше информации о штамме кори и вероятность диагностирования растет, т. е. $P(C \mid K)$ – вероятность появления сыпи из-за кори – возрастает с 0,9 до 0,95, а $P(C \mid \tilde{K})$ – вероятность появления сыпи по иным причинам – упадет с 0,15 до 0,1. Как это повлияет на точность диагностики? Каково новое значение $P(K \mid C)$? С учетом новых данных $P(C) = 0{,}95 \times 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}27$, а $P(K \mid C)$ по формуле Байеса есть 0,2, деленные на $P(C) = 0{,}27$ и умноженные на 0,95, что в итоге даст нам 0,704. Следовательно, доктор Почему теперь сможет определять корь в 70% случаев, т. е. точнее. Если вероятности станут 0,99 и 0,01 соответственно, вероятность определения кори, $P(K \mid C)$, станет 0,961, т. е. вероятность правильного диагноза возрастет до 96%.

Современные байесовцы Традиционные статистики совершенно не против формулы Байеса – когда вероятность можно измерить. Камень преткновения – интерпретация вероятности как степени уверенности или, как ее еще иногда называют, субъективной вероятности.

В суде вопрос вины или невиновности подчас определяется «балансом вероятностей». Говоря строго, этот критерий применим лишь к гражданским делам, но можно вообразить и сценарий, в котором его применяют к делам уголовным. Статистики, придерживающиеся частотного подхода, теряются перед задачей определения значения вероятности того, что подсудимый виновен. Байесовцы же не стесняются учитывать свои чувства. Как же это устроено? Если применять подход баланса вероятностей к оценке вины и невиновности, необходимо разобраться, как можно жонглировать вероятностями. Рассмотрим возможное развитие сюжета.

Член жюри присяжных выслушал дело в суде и решил, что вероятность вины осужденного – примерно 1 к 100. Во время совещания жюри этого присяжного вызывают в зал суда, заслушать еще одно свидетельство от обвиняющей стороны. У подсудимого в доме найдено оружие и глава обвинения считает, что вероятность нахождения оружия дома у подсудимого — целых 0,95, если подсудимый виновен, а если он невиновен, то вероятность нахождения у него оружия — всего 0,1.

Следовательно, вероятность нахождения оружия дома у подсудимого гораздо выше, если подсудимый виновен, чем в ситуации его невиновности. Вопрос к присяжному таков: как скорректировать отношение к подсудимому в свете этой новой информации? Применим нашу форму записи и обозначим *В* ситуацию, в которой подсудимый виновен, и *П* — нахождение новых показаний. Присяжный произвел начальную оценку вероятности $\mathrm{P}(B) = 1/100$ или 0,01. Эта вероятность называется априорной. Заново оцененная вероятность $\mathrm{P}(B \mid П)$ — пересмотренная вероятность вины с учетом показаний *П*, ее называют апостериорная вероятность. Формула Байеса в таком случае приобретает вид:

$$\mathrm{P}(B \mid П) = \frac{\mathrm{P}(П \mid B)}{\mathrm{P}(П)} \times \mathrm{P}(B)$$

и иллюстрирует мысль о том, что априорная вероятность корректируется новой, апостериорной вероятностью $\mathrm{P}(B \mid П)$. Аналогично вычислению $\mathrm{P}(C)$ в медицинском примере найдем $\mathrm{P}(П)$ и получим:

$$\mathrm{P}(B \mid П) = \frac{0{,}95}{0{,}95 \times 0{,}01 + 0{,}1 \times 0{,}99} \times 0{,}01 = 0{,}088.$$

Такой результат ставит присяжного в трудное положение: его исходная оценка виновности, равная 1%, возросла почти до 9%. Если бы сторона обвинения предположила, что вероятность нахождения оружия — аж целых 0,99, если подсудимый виновен, а если невиновен — 0,01, тогда, повторив вычисления по формуле Байеса, получим, что в этой ситуации присяжному пришлось бы пересмотреть свою оценку с 1% до 50%.

Применение формулы Байеса к таким случаям критикуют. Более всего оказывается под ударом способ оценки априорной вероятности. В свою защиту байесовский анализ предлагает метод обращения с субъективными вероятностями и корректирования их при получении дополнительных данных. Байесовский метод применим в широком диапазоне областей знания — от науки и предсказания погоды до уголовного права. Его сторонники доказывают разумность и практичность метода при обращении с неопределенностью. В его пользу говорит многое.

В сухом остатке: Убеждения с поправкой на сведения

33 Парадокс дней рождения

Представьте себя на верхней палубе клэпэмского автобуса, и заняться вам, в общем, нечем, кроме как считать соседей по автобусу, направляющихся ранним утром на службу. С высокой вероятностью все пассажиры независимы друг от друга; можем с уверенностью полагать, что их дни рождения случайно распределены по всем дням в году. Включая вас, на борту всего 23 человека. Не очень много, однако достаточно, чтобы вероятность совпадения дней рождения у двух пассажиров стала больше, чем половина на половину. Верите? Миллионы не верят, но это правда. Этому факту поражался даже маститый эксперт в вероятностях Уильям Феллер.

Клэпэмский автобус, допустим, маловат для наших целей, поэтому представим большую залу. Сколько людей нужно собрать в зале, чтобы *наверняка* нашлись два человека с совпадающими днями рождения? В году 365 дней (для простоты високосные годы считать не будем), поэтому, если в зале 366 человек, найдется как минимум одна пара, у которой дни рождения *уж точно* совпадут. Никак не выйдет, что у всех присутствующих дни рождения окажутся все разные.

В этом заключается «принцип голубятни»*: если $n + 1$ голубей занимают n ячеек, в одной точно больше одного голубя. Если бы людей было 365, уверенности в том, что дни рождения совпадут, у нас бы не возникло, поскольку они могли бы распределиться по всем дням в году. Однако, если все-таки взять случайных 365 человек, такой исход исключительно неправдоподобен, и вероятность того, что не найдется двух людей с одинаковыми днями рождения, минимальна. Будь даже 50 человек в зале, вероятность совпадения двух дней рождения — 96,5%.

* Также — принцип Дирихле, или «принцип ящиков», 1834 г.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1654
Блез Паскаль закладывает основы теории вероятностей

1657
Христиан Гюйгенс публикует первую в истории работу о вероятностях

1718
Абрахам де Муавр издает «Доктрину шансов», а в 1738 и 1756 годах выходят дополненные издания

Если число людей сократить, вероятность совпадения дней рождения уменьшится. Можно установить, что для компании в 23 человека вероятность такого совпадения — чуть больше $^1/_2$, а для 22 человек — чуть меньше этого значения. Число 23 — рубежное. Хоть решение классической задачи о днях рождения и поразительно, парадоксом эта задача, говоря строго, не является.

Можем доказать? Как же нам в этом убедиться? Давайте выберем случайного человека. Вероятность того, что у другого человека день рождения тогда же, когда и у первого, равна 1/365, а вероятность того, что оба не родились не в один день, равна единице минус это число (или 364/365). Вероятность, что у третьего человека день рождения совпадает с первыми двумя, 2/365, а обратная (вероятность несовпадения ни с первым, ни со вторым) — единица минус это число, т. е. 363/365. Вероятность того, что ни один из троих не родился в один день, есть умножение этих двух обратных вероятностей, или (364/365) × (363/365), т. е. 0,9918.

Продолжив в том же духе с 4, 5, 6, ... людьми, увидим суть этого «парадокса». Когда доберемся с бытовым калькулятором до 23 человек, получим ответ 0,4927 — такова вероятность того, что ни для кого из них не найдется пары с одинаковым днем рождения. Отрицание события «ни у кого из них не совпадают дни рождения» есть «как минимум у двоих дни рождения совпадают», и вероятность такого события $1 - 0{,}4927 = 0{,}5073$ чуточку больше пограничной $^1/_2$.

Если $n = 22$, вероятность того, что у двоих совпадут дни рождения, равна 0,4757, т. е. меньше $^1/_2$. Парадоксальность этого явления связана в первую очередь с языком. Результат решения этой задачи относится к двум людям, у которых совпадают дни рождения, но он ничего не говорит нам о том, *кто* эти люди. Мы не знаем, как лягут фишки. Если мистер Тревор Томсон, чей день рождения 8 марта, находится в зале, можно поставить следующий вопрос.

Сколько людей родилось в тот же день, что и мистер Томсон? Для ответа на этот вопрос вычисления иные. Вероятность того, что день рождения у мистера Томсона не совпадает с другим человеком, 364/365, т. е. вероятность того, что ни с кем из $n - 1$ человек, присутствующих в зале, у мистера Томсона не совпадает день рождения, равна $(364/365)^{n-1}$. Следовательно, вероятность совпадения его дня рождения с чьим-нибудь еще — единица минус это значение.

Если подставить в эту формулу $n = 23$, получится вероятность 0,061151, т. е. всего 6% вероятности, что у кого-нибудь еще день рождения 8 марта — в ту же дату, что

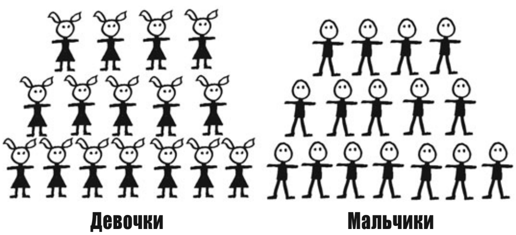
1920
Шатьендранат Бозе (Бошу) рассматривает теорию света Эйнштейна как задачу о размещениях

1939
Рихард фон Мизес формулирует парадокс дней рождений

и у мистера Томсона. Если увеличить значение n, вероятность вырастет. Но нам придется увеличить n аж до 254 (включая мистера Томсона), чтобы добиться вероятности, большей $^1/_2$. Для $n = 254$ эта вероятность равна 0,5005. Это пограничное значение, потому что при $n = 253$ вероятность эта равна 0,4991, т. е. меньше $^1/_2$. Необходимо созвать собрание из 254 человек, чтобы возникла вероятность больше $^1/_2$ найти человека с таким же днем рождения, что и у мистера Томсона. Это, наверное, несколько больше похоже на наши интуитивные ощущения, нежели поразительное решение классической задачи о днях рождения.

Другие задачи дней рождения Задачу дней рождения разнообразно обобщали. Один из вариантов – рассмотрение вероятности совпадения дней рождения трех человек. В этом случае потребуется 88 человек, чтобы вероятность такого совпадения стала больше половины. Для четырех, пяти, ... человек группы должны быть еще больше. В собрании 1000 человек, например, шансы больше, чем один к одному, что дни рождения совпадут у девятерых.

Другие игры с задачей дней рождения связаны с канунами дней рождения. В такой постановке задачи совпадением считаются близкие по датам дни рождения – в определенном диапазоне дней. Оказывается, нужна группа из всего 14 человек, чтобы вероятность совпадения дней рождения или их расположения одного за другим по календарю превысила 0,5.



Еще вариант той же задачи, для которого требуются математические приемы посложнее, – задача дней рождения мальчиков и девочек: если в классе поровну тех и других, какова минимальная группа, в которой вероятность того, что мальчик и девочка родились в один день, будет больше половины?

Ответ: класс из 32 человек (16 девочек и 16 мальчиков), не меньше. Аналогично – 23 в классической постановке задачи.

Слегка видоизменяя вопрос, получим разное новенькое (добыть ответы, однако, будет непросто). Предположим длинную очередь на концерт Боба Дилана; люди в ней собрались по случайному принципу. Нам интересны их дни рождения, и поэтому меломанов-двойняшек и тройняшек мы для простоты из расчетов исключим.

У входа всех поклонников Дилана просят назвать день рождения. Математический вопрос: сколько людей нужно впустить прежде, чем у двоих, *стоящих друг за другом,* дни рождения совпадут? Второй вопрос: сколько людей попадет в концертный зал прежде, чем объявится человек с днем рождения, как у мистера Томсона (8 марта)?

Расчеты дней рождения исходят из предположения о равномерности распределения дней рождения, а также из того, что у случайно выбранного человека день рождения может приходиться равновероятно на любой день. Эксперименты показывают, что это не вполне так (летом людей рождается больше), но тем не менее достаточно близко к истине, чтобы получаемые ответы имели практическую ценность.

Задачи о днях рождения – примеры задач о размещениях, в которых математики рассматривают раскладывание шаров по ячейкам. В задаче о днях рождения ячеек – 365 (в данном случае это все возможные дни рождения), а шары, которые нужно произвольно раскладывать по ячейкам, – люди. Задачу можно упростить – изучить вероятность попадания двух шаров в одну ячейку. Для задачи про мальчиков и девочек берем шары двух цветов.

Задача дней рождения интересует не только математиков. Шатьендранат Бозе увлекся Эйнштейновой фотонной теорией света. Он отошел от традиционных методов исследования и задумался о физических условиях в терминах задачи о размещении. Для него ячейками были не дни в году (как в исходной задаче), а энергетические уровни фотонов. Вместо людей по ячейкам он распределял фотоны. В науке задачам о размещении находится множество применений. Например, в биологии распространение эпидемии можно моделировать как задачу о размещении – ячейками в этом случае являются географические области, шарами – очаги заболевания, а вопрос заключается в том, как именно группируются эти самые очаги.

Мир полон поразительных совпадений, но лишь математика предоставляет нам способ вычислить их вероятность. Классическая задача дней рождения – вершина айсберга огромной области серьезной математики с важными практическими приложениями.

В сухом остатке: Вычисляем совпадения

34 Распределения

Владислава Борткевича зачаровывали таблицы смертности. Ему эта тема не казалась мрачной — она являла Борткевичу поле научных изысканий. Ему принадлежит знаменитый расчет количества смертей от брыкливых лошадей среди кавалеристов прусской армии. Инженер-электрик Фрэнк Бенфорд подсчитывал первые цифры разных видов в численных данных — оценивал, сколько в них встречается единиц, двоек и т. д. А Джордж Кингзли Ципф, преподававший немецкий в Гарварде, интересовался филологией и проанализировал частоту появлений разных слов в текстах.

Все эти примеры связаны с определением вероятностей событий. Какова вероятность, что за год x кавалеристов получат смертельный удар лошадиным копытом? Перечисление вероятностей для каждого значения x называется распределением вероятностей, или вероятностным распределением. К тому же это распределение дискретно, потому что x может принимать лишь определенные значения, т. е. между интересующими нас значениями есть пробелы. Три или четыре мертвых прусских кавалериста быть может, а $3\,^1/_2$ — нет. Мы увидим, что в случае распределения Бенфорда нас интересуют лишь вероятности появления цифр 1, 2, 3, ..., а для ципфовского слово «это» может занимать место № 8 по частоте употребления в тексте, но не, скажем, 8,23.

Жизнь и смерть в прусской армии Борткевич собрал записи о десяти кавалерийских корпусах за 20 лет, таким образом получив данные о 200 корпус-годах. Он оценил число смертей (в математике это называется переменной) и число корпус-лет, за которые произошли эти смерти. Например, оказалось, что в 109 корпус-годах не случилось ни одной смерти, а в один корпус-год — целых четыре.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1837
Симеон-Дени Пуассон описывает распределение, названное его именем

1881
Саймон Ньюком делает наблюдение, позднее получившее название закона Бенфорда

1898
Владислав Борткевич анализирует смертность прусских кавалеристов

Как же распределяется число смертей? Собрать информацию – лишь часть труда статистика, полевая работа. Борткевич разжился следующими данными:

Число смертей	0	1	2	3	4
Частота появления	109	65	22	3	1

$e^{-\lambda}\lambda^{x}/x!$

Формула Пуассона

К счастью, смерть от удара копытом – событие редкое. Наиболее подходящая теоретическая методика моделирования частоты возникновения редких событий – распределение Пуассона. Мог ли Борткевич, пользуясь этой методикой, предсказать результат, не посещая конюшен? Теоретическое пуассоново распределение утверждает: вероятность того, что число смертей (будем называть ее X) имеет значение x, определяется формулой Пуассона, где e – особое число, о котором мы говорили ранее, ассоциирующееся с ростом (см. стр. 24), а восклицательный знак обозначает факториал, т. е. число, умноженное на все целые числа между ним самим и единицей (см. стр. 26). Греческая буква лямбда (λ) – среднее значение числа смертей. Нам необходимо найти это среднее за 200 корпус-лет: умножаем 0 смертей на 109 корпус-лет (получим 0), 1 смерть за 65 корпус-лет (получим 65), 2 смерти за 22 корпус-года (получим 44), 3 смерти за 3 корпус-года (получим 9) и 4 смерти за 1 корпус-год (получим 4), а теперь сложим их вместе (получим 122) и разделим на 200. Итак, среднее число смертей на один корпус-год есть 122/200 = 0,61.

Теоретические вероятности (назовем их p) можно рассчитать, подставив значения $r = 0, 1, 2, 3$ и 4 в формулу Пуассона. Вот результаты:

Число смертей	0	1	2	3	4
Вероятности, p	0,543	0,331	0,101	0,020	0,003
Ожидаемое число смертей, $200 \times p$	108,6	66,2	20,2	4,0	0,6

Похоже, теоретическое распределение вполне совпадает с экспериментальными данными, собранными Борткевичем.

Первые числа Если проанализировать последние цифры телефонных номеров в одной колонке телефонной книги, изначально естественно предположить, что 0, 1, 2, ..., 9 распределяются равномерно. Появляются они случайно, и у любого – одинаковые шансы оказаться в списке. В 1938 году инженер-электрик Фрэнк Бенфорд обнаружил, что для первых цифр некоторых подборок данных это не так.

По сути, он заново открыл закон, впервые отмеченный астрономом Саймоном Ньюкомом в 1881 году.

1938
Фрэнк Бенфорд переформулирует закон распределения первых цифр

1950
Джордж К. Ципф выводит формулу, связывающую частоту словоупотребления с активным словарем автора текста

2003
Пуассоново распределение применяется в анализе рыбных запасов Северной Атлантики

Вчера я провел небольшой эксперимент: посмотрел на курсы обмена иностранных валют в одной центральной газете. Курс доллара к фунту оказался 2,119, т. е. для покупки 1 фунта нужно 2,119 доллара. Аналогично для покупки 1 фунта потребуется 1,59 евро или 15,390 гонконгских доллара. Объединив все данные и распределив их по частоте появления разных цифр на первом месте, получил следующую таблицу:

Первая цифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Итого
Частота появления	18	10	3	1	3	5	7	2	1	**50**
В процентах, %	36	20	6	2	6	10	14	4	2	**100**

Эти результаты подтверждают закон Бенфорда: для некоторых классов данных число 1 стоит на первом месте в 30% данных, число 2 – в 18% и т. д. Это уж точно не равномерное распределение, как в случае последних цифр телефонных номеров.

Неочевидно, почему столь многие выборки данных следуют закону Бенфорда. В XIX веке Саймон Ньюком отметил это, пользуясь математическими таблицами, и не мог предположить, насколько распространенное, оказывается, это свойство.

Примеры распределения Бенфорда можно найти и в таблицах спортивных событий, и в данных фондовых рынков, и в численности населения, и в длинах рек. Единицы измерения не имеют значения – неважно, в милях или метрах измерены длины рек. У закона Бенфорда есть практические приложения. Когда стало понятно, что этому закону следует бухгалтерская информация, стало проще вычислять ложные данные и ловить за руку мошенников.

Слова Среди многочисленных увлечений Дж. К. Ципфа было одно необычное: интерес к подсчету слов. Оказалось, десять самых популярных слов в английском языке – вот эти крошки:

Ранг	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Слово	*the*	*of*	*and*	*to*	*a*	*in*	*that*	*it*	*is*	*was*

Эти данные были получены обработкой широкого диапазона письменных текстов и подсчетом в них слов. Наиболее распространенному слову присвоили ранг 1, следующему – ранг 2 и т. д. В разных текстах ранги у слов могут слегка меняться, но принципиальной разницы наблюдаться не будет.

Неудивительно, что *«the»* (англ. определенный артикль) – самое распространенное, а *«of»* (англ. – предлог родительного падежа) – второе в списке. Если этот список продолжить, быть может, вам будет любопытно узнать, что *«among»* (англ. – напр., «среди», «в том числе») – на 500 месте, а *«neck»* (англ. напр., «шея», «горловина», «горло (бутылки)») – на 1000. Мы же рассмотрим лишь первые десять слов. Если выбрать случайный текст и посчитать эти слова, получится более-менее тот же порядок рангов. Удивительно то, что ранги связаны с реальным количеством слов в тексте. Слово *«the»* появится в два раза чаще, чем *«of»*, и втрое чаще, чем *«and»*, и т. д. Эти количества вычисляются по хорошо известной формуле. Эта эмпирическая закономерность была усмотрена Ципфом в практических данных. Теоретический закон Ципфа утверждает, что процент появления слова в тексте, обозначенный r, определяется так:

$$\frac{k}{r} \times 100,$$

где число k зависит только от размеров активного словаря автора. Если автор пользуется всеми словами английского языка, которых, по некоторым оценкам, около миллиона, значение k будет равно 0,0694. В формуле закона Ципфа слово *«the»* – это 6,94% всех слов в тексте. Аналогично *«of»* вполовину реже *«the»* и это 3,47% всех слов. В очерке на 3000 слов, написанном таким талантливым автором, будет 208 *«the»* и 104 *«of»*.

Для писателей с активным словарем в 20 000 слов значение k вырастает до 0,0954; следовательно, мы увидим в тексте 286 *«the»* и 143 *«of»*. Чем меньше словарь, тем чаще появляется *«the»*.

Глядим в магический кристалл Любое из этих распределений – хоть Пуассона, хоть Бенфорда, хоть Ципфа – дает нам возможность делать некоторые предсказания. Быть может, совсем железно предсказывать не удастся, но представлять, как распределяются вероятности, куда лучше, чем просто угадывать. А если прибавить к этим трем распределениям биномиальное, отрицательное биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое и многие другие, становится ясно, что у статистиков есть набор эффективных инструментов для анализа множества разных видов человеческой деятельности.

В сухом остатке: Предсказываем сколько

35 Кривая нормального распределения

«Нормальная» кривая играет ключевую роль в статистике. Ее называют эквивалентом прямой в математике. У нее есть действительно важные математические свойства, однако полевые данные, как показывает практика, в точности нормальному распределению следуют редко.

Кривая нормального распределения описывается математической формулой, соответствующей колоколообразной кривой: у нее один горб, а по обе стороны от него – два хвоста. Значение нормальной кривой – скорее теоретическое, нежели естественное, и у нее породистая родословная. В 1733 году Абрахам де Муавр, француз-гугенот, сбежавший в Англию от церковного преследования, ввел это распределение в связи со своими трудами по анализу случайности. Пьер-Симон де Лаплас опубликовал результаты этих исследований, а Карл Фридрих Гаусс применил в астрономии – эту кривую иногда называют гауссовой кривой погрешности.

Адольф Кетле включил нормальную кривую в свои социологические исследования, изданные в 1835 году; в них с помощью кривой нормального распределения он описал отклонение от «среднестатистического человека». В других своих экспериментах он измерил ростовые показатели французских новобранцев и обхват груди шотландских солдат и сделал вывод, что эти данные также укладываются в нормальное распределение. В те дни бытовало сильное верование, что большинство явлений «нормальны» именно в этом смысле.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1733

Абрахам де Муавр публикует работу о кривой нормального распределения как об аппроксимации биномиального распределения

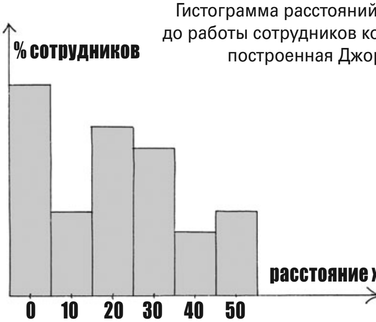
1820

Гаусс применяет нормальное распределение к астрономии в виде кривой погрешности (гауссовой кривой)

Вечеринка Предположим, Джорджина отправилась на вечеринку к Себастиану, и тот спросил у нее, далеко ли ей пришлось ехать? Джорджина позднее поняла, насколько это полезный вопрос для таких сборищ: его можно задавать кому угодно и он предполагает ответ, а к тому же он невинен и помогает беседе, если та не клеится.

На следующий день слегка похмельная Джорджина собралась к себе в контору, размышляя о том, далеко ли ее коллегам приходится ездить на работу. В столовой она выяснила, что некоторые живут за углом, а кое-кто — в 50 милях, все по-разному. Она решила воспользоваться своим положением кадровика очень большой компании и поместила вопрос в конце ежегодной анкеты для сотрудников: «Как далеко вам пришлось сегодня ехать на работу?» Джорджина пожелала выяснить, каково среднее расстояние от дома до работы среди сотрудников компании. Нарисовав гистограмму по результатам распределения расстояний, Джорджина не увидела никакой закономерности, но среднее расстояние вычислить смогла.

Гистограмма расстояний от дома до работы сотрудников компании, построенная Джорджиной



Это среднее оказалось равным 20 милям. Математики отмечают это значение греческой буквой μ (мю); в данном случае μ = 20. Дисперсия внутри совокупности данных обозначается буквой σ (сигма), иногда ее еще называют стандартным отклонением. Если стандартное отклонение маленькое, все данные близки по значению и дисперсия минимальна, а если оно большое, данные распределяются в широком диапазоне. Рыночный аналитик компании с образованием статистика показал Джорджине, что она могла бы получить свою цифру 20 с помощью выборки. Нет необходимости опрашивать *всех* сотрудников. Методика оценки определяется центральной предельной теоремой.

Возьмем случайную выборку, сделанную из всего персонала компании. Чем больше выборка, тем лучше, но 30 сотрудников вполне хватит. В эту случайную выборку попадут, скорее всего, и люди, которые живут по соседству, и те, кто ездит издалека. При расчете среднего расстояния до работы короткие расстояния уравновесят длинные. Математики обозначают среднее выборки $\sqrt{x}$, которое читается как «икс с чертой».

В Джорджинином случае наиболее вероятное значение $\sqrt{x}$ будет близко к 20 — среднему в совокупности данных. Хоть это и возможно, однако маловероятно, что среднее в выборке окажется очень маленьким или очень большим.

1835

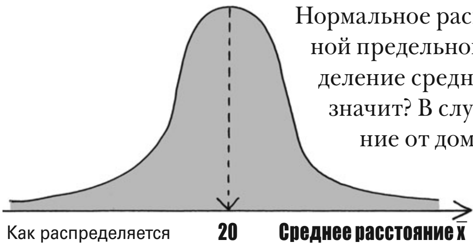
Адольф Кетле применяет кривую нормального распределения для оценки отклонений от «среднего человека»

1870-е

Распределение получает название «нормального»

1901

Александр Ляпунов строго доказывает центральную предельную теорему, применяя характеристические функции



Как распределяется среднее значение в выборке

Нормальное распределение важно для статистиков из-за центральной предельной теоремы. Она утверждает, что реальное распределение среднего по выборке $\sqrt{\overline{x}}$ близко к нормальному. Что это значит? В случае с Джорджиной, как x мы обозначили расстояние от дома до работы, $\overline{x}$ — среднее значение в выборке. Распределение x в гистограмме Джорджины совсем не похоже на колоколообразную кривую, однако распределение $\overline{x}$ — похоже, и его центр — вокруг $\mu = 20$.

Поэтому мы можем считать среднее значение в выборке $\sqrt{\overline{x}}$ оценочным для μ — среднего по совокупности данных. Дисперсия средних по выборке $\sqrt{\overline{x}}$ — дополнительный бонус. Если дисперсия значений x равна стандартному отклонению σ, дисперсия $\overline{x}$ равна $\sigma/\sqrt{n}$, где n — размер произведенной нами выборки. Чем больше выборка, тем у́же будет кривая нормального распределения и тем точнее будут оценки μ.

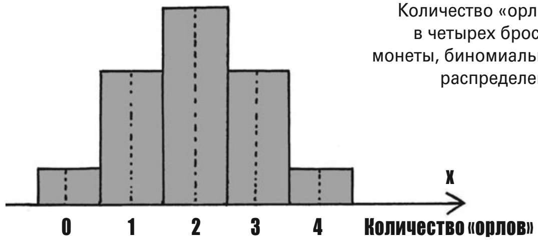
Другие нормальные кривые Проделаем несложный эксперимент: подбросим монету четыре раза. Вероятность выпадения «орла» всякий раз — $p = ^1/_2$. Результат четырех бросков можно записать, обозначив буквой *О* «орел» и *Р* «решку», в порядке их выпадения. Итого получится 16 возможных комбинаций. Например, может выпасть три «орла»: *РООО*. На самом деле есть всего четыре варианта выпадения трех «орлов» (остальные три — *ОРОО*, *ООРО*, *ОООР*), следовательно, вероятность выпадения трех орлов — 4/16 = 0,25.

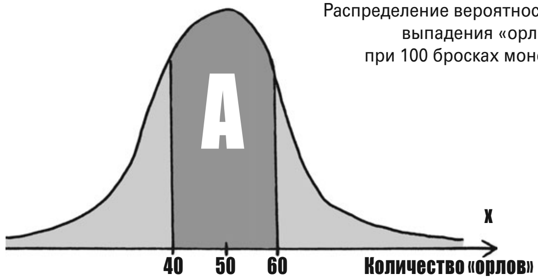
С небольшим количеством бросков все вероятности легко обсчитать и поместить в таблицу, а заодно и вычислить, как именно вероятности распределяются. Количество комбинаций можно определить по треугольнику Паскаля (см. стр. 52):

Количество «орлов»	0	1	2	3	4
Количество «решек»	1	4	6	4	1
Вероятность	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625
	(= 1/16)	(= 4/16)	(= 6/16)	(= 4/16)	(= 1/16)

Такое распределение вероятностей называется биномиальным и возникает, когда есть два возможных исхода (в данном случае «орел» или «решка»). Эти вероятности могут быть представлены в виде диаграммы, на которой они описываются *и* высотами, *и* площадями.

Четыре броска — маловато. А что, если подбросить монету много раз, например, 100? Биномиальное распределение применимо к $n = 100$, но может быть с пользой аппроксимировано кривой нормального распределения со средним $\mu = 50$ (предполагаем выпадение 50 «орлов» при подбрасывании монеты 100 раз) и стандартным отклонением $\sigma = 5$. Это и открыл Муавр в XVI веке.





Для больших значений n переменная x, определяющая количество успешных бросков, вписывается в нормальное распределение все лучше и лучше. Чем больше значение n, тем точнее аппроксимация, а 100 бросков — это достаточно много. Теперь допустим, что нам надо оценить вероятность того, что выпадет от 40 до 60 «орлов». Площадь A показывает интересующую нас область и вероятность выпадения от 40 до 60 орлов, что можно записать как *вер*$(40 \leqslant x \leqslant 60)$. Чтобы определить реальное численное значение, необходимо применить заранее составленные математические таблицы, и тогда выяснится, что *вер*$(40 \leqslant x \leqslant 60) = 0{,}9545$. Это означает, что вероятность выпадения от 40 до 60 «орлов» при 100 бросках монеты составляет 95,45%, т. е. такой исход очень вероятен.

Область за пределами A равна 1 – 0,9545, т. е. всего-навсего 0,0455. Поскольку нормальная кривая симметрична относительно своей центральной оси, половина этого результата соответствует вероятности выпадения более 60 «орлов» за 100 бросков монеты, что составляет всего лишь 2, 275%, т. е. шанс мизерный. Окажетесь в Лас-Вегасе — воздержитесь от подобных ставок.

В сухом остатке: Вездесущая кривая-колокол

36 Связанные данные

Как два множества данных связаны между собой? Сто лет назад статистики полагали, что ответ им известен. Корреляция и регрессия связаны между собой, как лошадь и повозка, но, подобно этой паре, отличаются друг от друга, и у каждой свои задачи. Корреляция определяет, насколько хорошо два количества — например, вес и рост — связаны друг с другом. Регрессию можно применять в предсказании значений одного качества (допустим, веса) в зависимости от другого (в нашем случае — роста).

Корреляция Пирсона Термин «корреляция» ввел в 1880-х годах Фрэнсис Гальтон. Викторианский джентльмен от науки, Гальтон обожал все измерять и применял корреляцию к своим исследованиям пар переменных – длины крыльев и хвостов у птиц, например. Коэффициент корреляции Пирсона, названный в честь биографа и протеже Гальтона – Карла Пирсона, измеряется по шкале от – 1 до + 1. Если численное значение этого коэффициента велико (допустим, + 0,9), это означает, что корреляция между переменными сильная. Коэффициент корреляции определяет тенденцию данных располагаться вдоль прямой. Если коэффициент близок к нулю, корреляции практически нет.

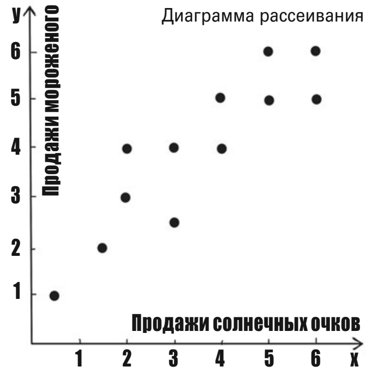
Нам часто хочется определить корреляцию между двумя переменными и понять, насколько сильно они связаны. Возьмем, к примеру, продажи солнечных очков и посмотрим, как они связаны с продажей мороженого. Сан-Франциско – отличное место для проведения такого исследования, и нам предстоит собрать сведения по каждому месяцу продаж в этом городе. Если выстроить точки графика в осях x (отражает продажи очков) и y (отражает продажи мороженого), для каждого месяца получится точка (x, y), описывающая данные по обоим видам продаж. Например,

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1806
Адриен-Мари Лежандр размещает данные методом наименьших квадратов

1809
Карл Фридрих Гаусс применяет метод наименьших квадратов в астрономии

1885–1888
Фрэнсис Гальтон вводит регрессию и корреляцию



точка (3, 4) означает, что майские продажи очков принесли 30 000 долларов, а мороженого – 40 000. Таким образом, можно отметить данные всех месяцев в году в виде точек (x, y) на диаграмме рассеивания. Для нашего примера значение коэффициента корреляции Пирсона составит примерно + 0,9, что означает сильную корреляцию. Данные явно выстраиваются вдоль прямой линии. Коэффициент положительный, потому что у прямой положительный градиент – она развивается на северо-восток.

Причина и корреляция Если между двумя переменными обнаружена корреляция, это еще не означает причинно-следственной связи. Такая связь может существовать, но одного лишь численного довода недостаточно. Применительно к причине/корреляции принято говорить «ассоциация», и от большего лучше воздерживаться.

Между продажами мороженого и очков от солнца существует сильная корреляция. С ростом продаж солнечных очков продажи мороженого тоже растут. Абсурдно было бы утверждать, что увеличение продаж очков *приводит* к увеличению продаж мороженого. В возникновении корреляции может быть некая промежуточная переменная, не сразу нам очевидная. Например, увеличение продаж и солнечных очков, и мороженого связаны между собой влиянием смены времен года (жаркой погоды летом и прохладной – зимой). В термине «корреляция» таится и еще одна опасность: между переменными корреляция может быть очень сильной, однако ни логической, ни научной связи может не оказаться. Можно установить корреляцию между номерами домов и совокупным возрастом обитателей каждого дома, но усматривать в этом смысл не стоит.

Корреляция Спирмена Корреляция практически применима и к другим случаям. Коэффициент корреляции можно приспособить для упорядоченных данных – т. е. таких, для которых нужно понимать, в каком порядке они следуют, а не только их численные значения.

Иногда в нашем распоряжении данные есть лишь в виде их порядковых номеров. Возьмем, к примеру, Алберта и Зака, двух непреклонных судей, которым необходимо оценить артистичность соревнующихся фигуристок. Алберт и Зак сами выигрывали олимпийские медали, и теперь их пригласили судействовать в финале соревнований, в котором участвуют пятеро спортсменов: Энн, Бет, Шарлотт, Дороти и Элли. Если бы Алберт и Зак оценили их в точности одинаково, все было бы просто, однако в жизни все иначе.

1896

Карл Пирсон публикует свои наработки по корреляции и регрессии

1904

Чарлз Эдвард Спирмен применяет ранговые корреляции в психологических исследованиях

С другой стороны, мы не ждем от Алберта и Зака противоположных оценок. В реальности их оценки окажутся где-то посередине между этими крайностями. По шкале от 1 до 5 Алберт оценил фигуристок так: Энн (лучшая), далее Элли, Бет, Шарлотт и, наконец, Дороти – на пятом месте. Зак оценил Элли как лучшую, а за ней Бет, Энн, Дороти и Шарлотт. Сведем эти результаты в таблицу:

Фигуристка	Оценки Алберта	Оценки Зака	Разница, d	d^2
Энн	1	3	– 2	4
Элли	2	1	1	1
Бет	3	2	1	1
Шарлотт	4	5	– 1	1
Дороти	5	4	1	1
***n* = 5**			**Итого:**	**8**

Как нам оценить степень согласия между судьями? Коэффициент корреляции Спирмена – инструмент, используемый математиками для такой оценки упорядоченных чисел. Значение этого коэффициента в данном случае равно + 0,6, что означает невеликое согласие между Албертом и Заком. Если обращаться с парами присужденных мест как с точками, можно построить по ним график и получить зрительное представление, насколько близко располагаются судейские оценки.

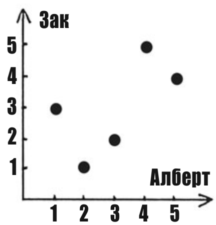
Формула этой корреляции была выведена в 1904 году психологом Чарлзом Спирменом под влиянием Фрэнсиса Гальтона – как и в случае с Пирсоном.

Прямые регрессии Выше ли вы ростом или ниже обоих ваших родителей или ваш рост – средний между отцом и матерью? Если бы все мы были выше наших родителей (а такое происходит в каждом поколении), в один прекрасный день все население было 6 десяти футов ростом и выше, а такое, конечно, невозможно. Если бы все мы были ниже, то население бы постепенно измельчало, что в равной мере маловероятно. Правда – где-то посередине.

$$1-\frac{6\times sum\,d^2}{n\times(n^2-1)}$$

Формула Спирмена

В 1880-х Фрэнсис Гальтон поставил эксперименты, в которых сравнил рост взрослых молодых людей с ростом их родителей. Каждому значению переменной x – росту родителей (точнее, среднее от суммы роста матери и отца) – он поставил в соответствие рост их отпрыска. Речь идет об ученом-практике, а следовательно, в ход пошли карандаши и бумага, а с их помощью возникли таблицы данных. Для среднего роста 205 родителей и 928 потомков он обнаружил средний рост в $68^1/_4$ дюймов, или 5 футов $8^1/_4$ дюймов (173,4 см), и это значение назвал посредственностью.



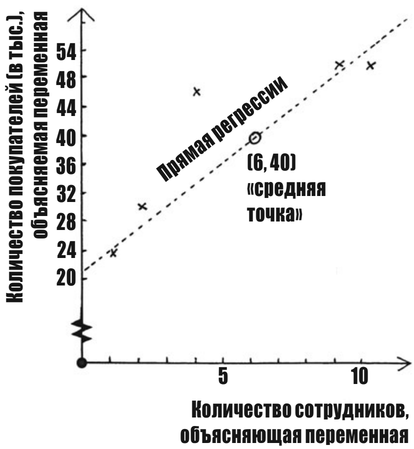
Оценим степень согласия между двоими судьями

Он обнаружил, что дети очень высоких «усредненных» родителей обычно выше, чем посредственность, но не настолько рослы, как их усредненный родитель, тогда как приземистые дети оказались выше своих усредненных родителей, однако ниже посредственности. Иными словами, рост детей регрессировал к посредственности. Это похоже на игру лучшего отбивающего «Нью-йоркских янки» Алекса Родригеса: за средними показателями его игры в лучшие бейсбольные сезоны обычно следуют средние похуже, однако в целом они все равно будут лучше среднего показателя по всем игрокам лиги. В этом случае можно сказать, что его средние показатели регрессировали к среднему (или среднему арифметическому).

Регрессия — могучая методика широкой применимости. Предположим, одной исследовательской группе для опроса в некой популярной сети магазинов необходимо отобрать пять — от маленьких торговых точек с 1000 покупателей в месяц до гигантских, с 10 000 покупателей в месяц. Исследовательская группа рассматривает количество персонала, нанятого в каждом магазине, и собирается применить регрессию для оценки количества персонала, необходимого в других магазинах.

Количество покупателей (в тыс.)	1	4	6	9	10
Количество сотрудников	24	30	46	47	53

Построим по этим данным график, где на оси x будем откладывать количество покупателей (независимая, или объясняющая, переменная), а количество персонала — по оси y (зависимая, или объясняемая, переменная). Именно количеством покупателей объясняется необходимое количество сотрудников, а не наоборот. Среднее количество покупателей в магазинах равно 6 (т. е. 6000), а среднее количество сотрудников — 40. Прямая регрессии всегда проходит через точку со средним значением, в нашем случае — (6, 40). Существуют формулы расчета прямой регрессии — прямой, наилучшим образом подходящей имеющимся данным (ее еще называют прямой наименьших квадратов). В нашем случае это прямая $\hat{y} = 20{,}8 + 3{,}2x$, поэтому наклон прямой — 3,2 и он положительный (прямая направлена слева направо вверх); она пересекает вертикальную ось y в точке 20,8. Показатель $\hat{y}$ — оценка значения y, полученного из этой прямой. Если нам нужно понять, сколько сотрудников потребуется в магазин с 5000 покупателей в месяц, подставим 5 вместо x в уравнение и получим оценочное значение $\hat{y} = 37$. Вот она, практическая польза регрессии.



В сухом остатке: Взаимодействие данных

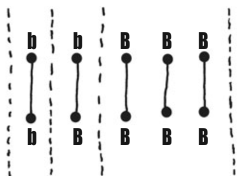
37 Генетика

Генетика — область биологии, почему же о ней речь в книге о математике? Ответ таков: две эти науки перекрестно опыляют и обогащают друг друга. Задачи генетики требуют математики, однако и генетика подсказывает новые направления алгебре. Грегор Мендель — центральная фигура в генетике, науке о наследовании. Наследуемые характеристики — цвет глаз, волос, цветовая слепота, лево- и праворукость, группа крови — определяются факторами (аллелями) генов. Мендель говорил, что эти признаки передаются следующему поколению независимо друг от друга.

Как же голубоглазость передается следующему поколению? В базовой модели имеем два признака — *b* и *B*:

b — признак голубоглазости,
B — признак кареглазости.

У людей эти признаки проявляются попарно, в результате чего возникает три возможных генотипа — *bb*, *BB* и *bB* (потому что *Bb* и *bB* — одно и то же). Человек является носителем одного из этих трех генотипов, что и определяет цвет глаз этого человека. Например, население может состоять на одну пятую из людей с генотипом *bb*, еще на одну пятую — с генотипом *bB*, а оставшиеся три пятых имеют генотип *BB*. В процентном отношении эти генотипы составляют 20%, 20% и 60% населения. Можно представить эти пропорции графически.



Население с генотипами *bb*, *bB* и *BB* в пропорции 1 : 1 : 3

Признак *B*, обозначающий карий цвет глаз, — доминантный, а *b*, голубой цвет глаз, — рецессивный. У человека с чистым генотипом *BB* глаза будут карими, но тот же цвет глаз будет и у человека со смешанным признаком, т. е. с генотипом *bB*, поскольку *B* — признак доминантный. Человек с чистым генотипом *bb* — единственный обладатель голубых глаз.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1718

Абрахам де Муавр публикует «Доктрину шансов»

1865

Грегор Мендель предполагает существование генов и законов наследования

Животрепещущий вопрос возник в биологии в начале XIX века. Станет ли человечество в конце концов полностью кареглазым, а голубоглазость исчезнет совсем? На грани исчезновения ли голубоглазые? Ответ оказался решительно отрицательным.

Закон Харди–Вайнберга Полученный ответ объяснен законом Харди–Вайнберга – приложением простой математики к генетике. Он показывает, как в теории наследственности Менделя доминантный ген не вытесняет рецессивный целиком, и рецессивный ген не вымирает.

Г. Х. Харди был английским математиком, гордившимся практической неприменимостью математики. Этот великий исследователь в области чистой математики наиболее известен своим вкладом в генетику, а началось все с единственной математической выкладки на обороте конверта, произведенной после крикетного матча. Вильгельм Вайнберг же – совсем другого поля ягода. Он был практикующим врачом в Германии и всю жизнь занимался генетикой. Он открыл этот закон одновременно с Харди в 1908 году.

Закон описывает большой объем населения, в котором спаривание происходит случайно. В нем нет превалирующих пар, т. е. голубоглазые люди не делают предпочтения голубоглазым. После спаривания ребенок получает по одному признаку от каждого родителя. Например, гибридный генотип *bB*, создав пару с гибридным фенотипом *bB*, может произвести на свет любой из трех генотипов *bb*, *BB* или *bB*, однако пара *bb* + *BB* может дать лишь гибрид *bB*. Какова вероятность передачи *b*-признака? Посчитав число *b*-признаков, получим, что есть всего два *b*-признака для любого *bb*-генотипа и один *b*-признак для генотипа *bB*, и тогда, пропорционально, получим итого 3 *b*-признака из 10 (в нашем примере с населением, у которого отношения генотипов соответствуют пропорции 1 : 1 : 3). Вероятность передачи *b*-признака ребенку, таким образом, – 3/10, или 0,3. Вероятность передачи *B*-признака – 7/10, или 0,7. Вероятность генотипа *bb* у следующего поколения – 0,3 × 0,3 = 0,09. Полный набор вероятностей представлен в таблице:

	B		*B*	
b	*Bb*	0,3 × 0,3 = 0,09	*bB*	0,3 × 0,7 = 0,49
B	*Bb*	0,3 × 0,7 = 0,21	*BB*	0,7 × 0,7 = 0,49

Гибридные генотипы *bB* и *Bb* идентичны друг другу, и вероятность их возникновения – 0,21 + 0,21 = 0,42.

Выразив в процентах соотношения генотипов *bb*, *bB* и *BB* в новом поколении, получим 9%, 41% и 49%. Поскольку *B* – доминантный признак, 42% + 49% = 91%, у первого

1908
Годфри Херолд Харди и Вильгельм Вайнберг показывают, почему рецессивные гены не вытесняются доминантными

1918
Роналд Эйлмер Фишер примиряет теорию Дарвина с теорией наследования Менделя

1953
Открыта структура двойной спирали ДНК

поколения глаза будут карими. И лишь отдельные люди с генотипом *bb* покажут наблюдаемые характеристики признака *b*, т. е. всего у 9% населения глаза будут голубыми.

Начальное распределение генотипов было 20%, 20% и 60%, а в новом поколении оно стало 9%, 42% и 49%. А дальше? Рассмотрим, что произойдет в следующем поколении, полученном от этого (второго) путем случайного скрещивания. Пропорция *b*-признака есть $0{,}09 + {}^1/_2 \times 0{,}42 = 0{,}3$, пропорция *B*-признака – $^1/_2 \times 0{,}42 + 0{,}49 = 0{,}7$. Это соотношения, *идентичные* предыдущим вероятностям передачи признаков *b* и *B*. Распределение генотипов *bb*, *bB* и *BB* в последующем поколении будет таким же, как и в предыдущем, особенно для генотипа *bb*, генотипа голубоглазости, который не отмирает, а остается постоянным у 9% населения. Таким образом, последующие соотношения генотипов в процессе последовательных случайных скрещиваний:

$$20\%, 20\%, 60\% \to 9\%, 42\%, 49\% \to \ldots \to 9\%, 42\%, 49\%.$$

Такая последовательность соответствует закону Харди–Вайнберга: через поколение пропорции генотипов остаются постоянными, равно как и вероятность передачи генотипа.

Доказательство Харди Чтобы убедиться, что закон Харди–Вайнберга действителен для *любого* начального состава населения, а не только для 20%, 20% и 60%, который мы взяли для примера, нам лучше всего обратиться к доказательству самого Харди, которое он предложил издателю американского журнала «Сайенс» в 1908 году.

Харди начинает с того, что обозначает начальное распределение генотипов *bb*, *bB* и *BB* переменными p, $2r$ и q, а вероятности передачи $p + r$ и $r + q$. В нашем численном примере (20%, 20% и 60%), $p = 0{,}2$, $2r = 0{,}2$ и $q = 0{,}6$. Вероятность передачи признаков *b* и *B* есть $p + r = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$, а $r + q = 0{,}1 + 0{,}6 = 0{,}7$. Допустим, что начальное соотношение генотипов *bb*, *bB* и *BB* – 10%, 60% и 30%. Как в таком случае сработает закон Харди–Вайнберга? В этом примере $p = 0{,}1$, $2r = 0{,}6$, а $q = 0{,}3$, и тогда вероятности передачи признаков *b* и *B*, соответственно, равны $p + r = 0{,}4$ и $r + q = 0{,}6$. Таким образом, соотношение генотипов в следующем поколении – 16%, 48% и 36%. Последующие соотношения генотипов *bb*, *bB* и *BB* при случайных скрещиваниях таковы:

$$10\%, 60\%, 30\% \to 16\%, 48\%, 36\% \to \ldots \to 16\%, 48\%, 36\%,$$

и пропорции стабилизируются в исходном виде через поколение, а вероятности передачи в отношении 0,4 и 0,6 остаются постоянными. С этими показателями 16% населения будет голубоглазым, а 48% + 36% = 84% – кареглазым, потому что *B* в генотипе *bB* доминирует.

Итак, закон Харди–Вайнберга предполагает, что соотношение генотипов *bb*, *bB* и *BB* остается постоянным из поколения в поколение, какими бы ни были начальные соотношения признаков у населения. Доминантным геном *B* рецессивный не вытесняется, и соотношения генотипов по сути устойчивы.

Харди подчеркивал, что эта модель – приближение. Ее простота и изящество зависят от многих допущений, которые в реальности не исполняются. В модели вероятность генной мутации или изменений в самих генах никак не учитываются, а следствие постоянства вероятностей генной передачи – отсутствие учета фактора эволюции. В реальной жизни присутствует «дрейф генов», и вероятности передачи факторов постоянными не остаются. Это приводит к изменению общих соотношений, и так развиваются новые биологические виды.

Закон Харди–Вайнберга объединил на сущностном уровне теорию Менделя – «квантовую теорию» генетики – с дарвинизмом и естественным отбором. Он ждал появления гения Р. Э. Фишера – именно он примирил Менделеву теорию наследования с теорией непрерывности, согласно которой характеристики вида эволюционируют.

Науке генетике до 1950-х годов не хватало физического понимания, что есть генетический материал как таковой. Тогда-то и произошел прорыв – благодаря Фрэнсису Крику, Джеймсу Уотсону, Морису Уилкинзу и Розалинд Фрэнклин. Носителем генетической информации оказалась дезоксирибонуклеиновая кислота (ДНК). Для моделирования знаменитой двойной спирали (пары спиралей, обвивающих одну ось) потребовалась математика. Вдоль этой двойной спирали и размещаются гены.

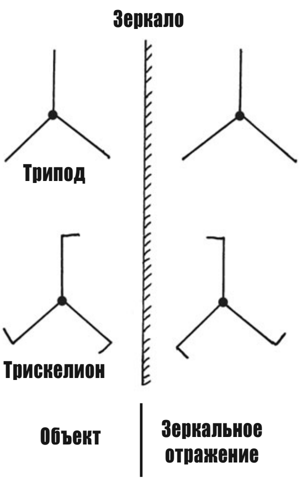
В генетических исследованиях математика необходима. Из базовой геометрии спиралей ДНК и потенциально непростого закона Харди–Вайнберга были развиты математические модели, описывающие множество характеристик (не только цвет глаз), включая различия по признакам мужского и женского пола, а также учитывающие неслучайное скрещивание. Генетика как наука в долгу не осталась: благодаря ей в математике возникли новые направления абстрактной алгебры с интересными математическими свойствами.

В сухом остатке: Смута в генофонде

38 Группы

Эварист Галуа погиб на дуэли в 20 лет, но успел оставить математикам идей не на одно столетие. Эти идеи касаются теории групп — математических структур, с помощью которых можно измерять симметрию. Помимо художественной ценности, симметрия — обязательный ингредиент будущей теории всего на свете, о которой мечтают некоторые ученые. Теория групп — клей, связывающий «все на свете».

Симметрия — повсюду. Она есть у греческих ваз, у снежинок, часто — у зданий и у некоторых букв алфавита. Симметрия бывает нескольких видов, главные — зеркальная и вращательная. Мы рассмотрим лишь двухмерную симметрию — все объекты нашего исследования размещаются на плоской поверхности этой страницы.



Зеркальная симметрия Можем мы установить зеркало так, чтобы объект перед зеркалом выглядел в точности как его отражение? Слово ПОП зеркально симметрично, а ПОТ — нет; ПОП перед зеркалом и ПОП в зеркале выглядят одинаково, а ПОТ превращается в ТОП. У трипода есть зеркальная симметрия, а у трискелиона (трипода в тапках) — нет. Трискелион перед зеркалом завернут по кругу направо, а его отражение в так называемой плоскости изображения — налево.

Вращательная симметрия А еще можно поставить вопрос следующим образом: есть ли такая ось, перпендикулярная плоскости страницы, вокруг которой можно повернуть объект на некоторый угол и он при этом совместится с самим собой? И у трипода, и у трискелиона вращательная симметрия есть. Трискелион, что буквально означает «три ноги», — интересная фигура. «Правая» версия — символ острова Мэн, а еще она присутствует на флаге Сицилии.

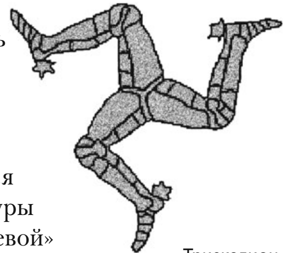
СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1832
Эварист Галуа предлагает идею групп преобразований

1854
Артур Кэли пытается обобщить концепцию групп

1872
Феликс Клейн берется за разработку классификации геометрии с применением теории групп

Если повернуть эту фигуру на 120 или 240 градусов, повернутое изображение совпадет с самим собой; если перед поворотом закрыть глаза и открыть их после, то увидим тот же трискелион.



Трискелион острова Мэн

Любопытно заметить, что сколько ни крути эту трехногую фигуру на плоскости, «правая» никогда не превратится в «левую». Объекты, у которых отражение в зеркале отличается от них самих, называются хиральными — они похожи, но не одинаковы. Молекулярные структуры некоторых химических веществ могут существовать в «правой» и «левой» формах — в трехмерном пространстве. Это примеры хиральных объектов. Таково вещество лимонен; одна из его форм входит в состав цитрусовых эфирных масел, а другая — хвойных. Лекарственное вещество талидомид в одной форме — эффективное средство от утреннего недомогания при беременности, а прием другой может иметь трагические последствия.

Описание симметрии В случае с трискелионом основные операции симметрии сводятся к повороту (по часовой стрелке) R на 120° и S — на 240°. Преобразование I — поворот на 360° — равносильно отсутствию каких-либо действий над фигурой. Комбинации этих поворотов можно записать в таблицу аналогично таблице умножения.

Такая таблица подобна обычной таблице умножения с числами, разница лишь в том, что мы «умножаем» между собой символы. Согласно наиболее употребимому обозначению, умножение $R \circ S$ означает поворот трискелиона по часовой стрелке на 240° (S), а затем на 120° (R), что в результате дает поворот на 360°, т. е. никакого изменения вообще. Записать это можно так: $R \circ S = I$, результат этого умножения находится в предпоследнем ряду таблицы, в последней колонке.

$\circ$	I	R	S
I	I	R	S
R	R	S	I
S	S	I	R

Таблица Кэли для группы симметрии трискелиона

Группа симметрии трискелиона состоит из I, R и S, а таблица умножения показывает результаты их сочетания. Поскольку группа содержит три элемента, ее размер (или «порядок») равен трем. Представленная таблица также носит название таблицы Кэли — в честь Артура Кэли, дальнего родственника сэра Джорджа Кэли, пионера воздухоплавания.

Как и трискелион, трипод (без тапок) обладает вращательной симметрией. Но у него есть еще и зеркальная симметрия, а это — бóльшая группа симметрии. Обозначим отражения по трем зеркальным осям как U, V и W.

1891

Евграф Федоров и Артур Шёнфлис независимо друг от друга создают классификацию из 230 кристаллографических групп

1983

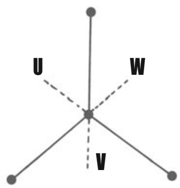
Классификация конечных простых групп завершена, грандиозная теорема доказана

$\circ$	I	R	S	U	V	W
I	I	R	S	U	V	W
R	R	S	I	V	W	U
S	S	I	R	W	U	V
U	U	W	V	I	S	R
V	V	U	W	R	I	S
W	W	V	U	S	R	I

Таблица Кэли для группы симметрии трипода

Большая группа симметрии трипода — ее порядок шесть — состоит из шести преобразований: I, R, S, U, V и W, все они представлены в таблице умножения.

Интересное преобразование получается в результате комбинации двух отражений по разным осям, например $U \circ W$ (сначала осуществляем отражение W, а затем — отражение U). Результирующее преобразование — поворот трипода на 120°, символически это записывается так: $U \circ W = R$. Сочетание отражений в обратном порядке, т. е. $W \circ U = S$, эквивалентно повороту на 240°. Отдельно отметим, что $U \circ W \neq W \circ U$. В этом и состоит ключевая разница между таблицей умножения групп и обычной таблицей умножения для чисел.



Отражения трипода

Группа, в которой порядок умножения элементов не имеет значения, называется абелевой группой — в честь норвежского математика Нильса Абеля. Группа симметрии трипода — наименьшая из неабелевых групп.

Абстрактные группы В XX веке алгебра тяготела к абстракциям, а в абстрактной алгебре группа определяется некоторыми базовыми правилами — аксиомами. С этой точки зрения группа симметрии треугольника есть всего лишь пример некой абстрактной системы.
В алгебре существуют системы проще групп, они требуют меньшего числа аксиом; другие — сложнее, и аксиом у них больше. Концепция группы, однако, как раз то, что надо; это самая важная алгебраическая система. Поразительно: из столь немногих аксиом возник столь обширный корпус знаний. Преимущество абстрактного метода — в том, что общие теоремы можно доказать для всех групп и применять по необходимости для тех или иных конкретных.

В теории групп есть одно особое свойство: она допускает наличие малых групп внутри больших. Группа симметрии трискелиона третьего порядка — подгруппа симметрии группы трипода с порядком шесть. Ж. Л. Лагранж доказал ключевой факт о подгруппах: теорема Лагранжа утверждает, что порядок подгруппы всегда делит порядок группы без остатка. Таким образом, нам точно известно, что у группы трипода не может быть подгрупп четвертого или пятого порядка.

Классификация групп Существует обширный регламент классификации всех возможных конечных групп. Нет необходимости перечислять их все, поскольку некоторые группы построены из нескольких простых, и поэтому нам интересны лишь простые.

Принцип классификации очень похож на тот, что применяется в химии: он исходит из представления об основных химических элементах, а не о сложных веществах, которые из них получаются. Группа симметрии трипода из шести элементов — «сложное вещество», полученное из группы поворотов (третьего порядка) и отражений (второго порядка).

Аксиомы для групп

Множество элементов G, на котором задана операция умножения $\circ$, называется группой, если:

1. Есть такой элемент 1 внутри G, что $1 \circ a = a \circ 1 = a$ для всех элементов a в группе G (элемент 1 называется «единичным»).
2. Для любого элемента a в множестве G есть элемент $\bar{a}$, для которого верно $\bar{a} \circ a = a \circ \bar{a} = 1$ (элемент $\bar{a}$ называется «обратным»).
3. Для любых элементов a, b и c в G верно: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (ассоциативность умножения).

Практически все простые группы можно разделить на известные классы. Исчерпывающая классификация, называемая «грандиозной теоремой», была предъявлена Дэниэлом Горенштейном в 1983 году; эта классификация — результат 30-летней исследовательской работы и публикаций многих математиков. Это атлас всех известных групп. Простые группы попадают в один из четырех основных типов, однако было обнаружено 26 групп, не подходящих ни под одну из категорий. Эти группы названы спорадическими.

Спорадические группы — «белые вороны», как правило высокого порядка. Пять наименьших знал еще Эмиль Матьё в 1860-х годах, однако основная работа с ними велась между 1965 и 1975 годами. Наименьшая спорадическая группа имеет порядок $7920 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11$, однако группы действительно великанского порядка — «маленький монстр» и просто «монстр»; порядок последнего $2^{46} \times 3^{20} \times 5^9 \times 7^6 \times 11^2 \times 13^3 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 71$, что в степенях десяти примерно равно 8×10^{53}, или, если угодно, 8 с 53 нулями, а это очень большое число. Можно доказать, что 20 из 26 спорадических групп есть подгруппы этого «монстра», но шесть групп совсем уж ни в какую классификацию не вписываются и известны под названием «парии».

Лаконичные доказательства и краткость математике всегда были дороги, однако доказательство классификации конечных групп — примерно 10 000 страниц дотошных символьных доводов. Прогресс математики не всегда происходит за счет гениев-одиночек.

В сухом остатке: Измеряем симметрию

39 Матрицы

Поговорим о «необычной» алгебре — это революция в математике, которая произошла в середине XIX века. Математики веками игрались с монолитами чисел, но мысль о том, что с этими монолитами можно обращаться как с одним числом, зародилась 150 лет назад в кружке математиков, осознавших потенциал такого подхода.

Обыкновенная алгебра традиционна, в ней символы a, b, c, x или y обозначают отдельные числа. Многим не сразу дается понимание смысла такого представления, однако для математиков это был гигантский прорыв. Такой же тектонический сдвиг произвела и «необычная» алгебра. Для сложных прикладных задач переход из одномерной алгебры к многомерной оказался невероятно продуктивным.

Многомерные числа В обычной алгебре a может представлять, например, число 7, и тогда мы пишем $a = 7$, однако в теории матриц A — «многомерное число», например, вот такой «слиток»:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

У этой матрицы три ряда и четыре столбца (матрица 3×4), но в принципе матрицы бывают с любым количеством рядов и столбцов — даже великаны 100×200, в которых 100 рядов и 200 столбцов. Важнейшее преимущество матричной алгебры заключается в возможности оперировать огромным массивом чисел — как в статистике, например, — как единой сущностью. Более того, с этими массивами чисел можно управляться просто и эффективно. Если нужно сложить или умножить все числа в двух наборах данных по 1000 чисел в каждом, нам

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

200 до н. э.
Китайские математики пользуются таблицами чисел

1850
Джеймс Джозеф Сильвестр вводит термин «матрица»

1858
Артур Кэли публикует «Мемуар о теории матриц»

не придется производить 1000 операций – достаточно будет одного (сложения или умножения матриц).

Практический пример Предположим, матрица A представляет недельный объем производства компании «АЯКС». У «АЯКСА» есть три фабрики, расположенные в разных частях страны, а их производительность измеряется в единицах (допустим, в тысячах штук) изготовляемой ими продукции. В нашем примере количества, увязанные с матрицей на предыдущей странице, таковы:

	продукт 1	продукт 2	продукт 3	продукт 4
фабрика 1	7	5	0	1
фабрика 2	0	4	3	7
фабрика 3	3	2	0	2

На следующей неделе производственный план может оказаться другим, и его мы запишем как другую матрицу, B. Допустим, производственный план (матрица B) выглядит так:

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Какова суммарная производительность за две недели? Теоретики матриц сообщают, что ответ – сумма матриц A и B, равная сумме соответствующих чисел:

$$A + B = \begin{pmatrix} 7+9 & 5+4 & 0+1 & 1+0 \\ 0+0 & 4+5 & 3+1 & 7+8 \\ 3+4 & 2+1 & 0+1 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 15 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Все, в общем, просто. Как ни жаль, умножение матриц куда менее очевидно. Вернемся к компании «АЯКС» и предположим, что прибыль с каждого из четырех видов продукции – **3**, **9**, **8**, **2**. Общую прибыль фабрики 1 с производительностью по четырем видам продуктов 7, 5, 0, 1 мы, конечно, посчитать можем – вот так: $7 \times \mathbf{3} + 5 \times \mathbf{9} + 0 \times \mathbf{8} + 1 \times \mathbf{2} = 68$.

Но фабрик несколько, и мы можем так же просто вычислить общую прибыль T всех фабрик:

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times \mathbf{3} + 5 \times \mathbf{9} + 0 \times \mathbf{8} + 1 \times \mathbf{2} \\ 0 \times \mathbf{3} + 4 \times \mathbf{9} + 3 \times \mathbf{8} + 7 \times \mathbf{2} \\ 3 \times \mathbf{3} + 2 \times \mathbf{9} + 0 \times \mathbf{8} + 2 \times \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 74 \\ 31 \end{pmatrix}$$

1878

Георг Фробениус доказывает некоторые ключевые выводы матричной алгебры

1925

Вернер Гейзенберг (Хайзенберг) применяет матричную механику в квантовой теории

Приглядитесь внимательнее, и увидите умножение *ряда* на *столбец* — ключевую операцию матричного умножения. А если помимо прибылей с отдельных продуктов нам даны и объемы производимых продуктов по имеющимся типам — **7**, **4**, **1**, **5**, — мы можем одним махом посчитать *и* прибыли, *и* количество мест хранения для всех трех фабрик — одним матричным умножением:

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 4 \\ 8 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & 74 \\ 74 & 54 \\ 31 & 39 \end{pmatrix}$$

Итого мест хранения необходимо 74, 54 и 39 — согласно второму столбцу результирующей матрицы. Теория матриц — могучая штука. Вообразите компанию с сотней фабрик, тысячами видов продукции, разными объемами прибыли с каждого продукта и потребность в хранении, разнящуюся от недели к неделе. Матричная алгебра позволяет рассчитывать и понимать подобные конструкты практически немедленно, не беспокоясь о деталях.

Матричная алгебра и алгебра обычная Между матричной и обычной («школьной») алгеброй существует множество параллелей, однако самое знаменитое различие — в умножении матриц. Умножим матрицу A на матрицу B, а потом попробуем наоборот и получим:

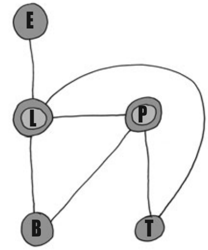
$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times7+5\times4 & 3\times6+5\times8 \\ 2\times7+1\times4 & 2\times6+1\times8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 58 \\ 18 & 20 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\times3+6\times2 & 7\times5+6\times1 \\ 4\times3+8\times2 & 4\times5+8\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 41 \\ 28 & 28 \end{pmatrix}$$

Таким образом, в матричной алгебре $A \times B$ может отличаться от $B \times A$, а в обычной алгебре такого быть не может — результат умножения двух чисел не зависит от перемены мест множителей.

Еще одно различие — в обратных величинах. В обычной алгебре обратное число найти проще простого. Если $a = 7$, обратная величина — $^1/_7$, поскольку обратные числа при умножении друг на друга дают единицу: $^1/_7 \times 7 = 1$. Можно записать число, обратное a, так: $a^{-1} = {}^1/_7$, и тогда $a^{-1} \times a = 1$.

Возьмем пример из теории матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ и докажем, что $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, потому что $A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — так называемая единичная матрица, аналог 1 в обычной алгебре. В ней лишь у нуля нет обратного числа, в то время как в матричной алгебре обратной нет у многих матриц.



Командировочный план Другой пример применения матриц — анализ системы маршрутов авиакомпаний, включающей и крупные узловые, и маленькие аэропорты. На практике в эти системы включены сотни пунктов назначения, но мы возьмем небольшой частный пример: узловые аэропорты **Л**ондон (**L**) и **П**ариж (**P**), маленькие — **Э**динбург (**E**), **Б**ордо (**B**) и **Т**улуза (**T**) — и сконструируем систему всех возможных *прямых* перелетов. Прежде чем анализировать такую систему на компьютере, его надо запрограммировать с применением матриц. Если прямой перелет между двумя аэропортами есть (как, например, между Лондоном и Эдинбургом), на пересечении ряда и столбца, обозначенных соответствующими аэропортами, вписывают 1. Обозначим «матрицу смежности», описывающую нашу систему перелетов, изображенную на рисунке справа, буквой A.

$$A = \begin{array}{c} \\ L \\ P \\ E \\ B \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} L & P & E & B & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A \times A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \boxed{0} & 1 & 1 \\ 2 & \boxed{3} & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Подматрица в нижнем углу (выделена пунктиром) показывает, что прямых перелетов между тремя небольшими аэропортами нет. Результат умножения матрицы A на саму себя, $A \times A = A^2$, можно интерпретировать как ответ на вопрос о количестве перелетов между двумя аэропортами *с одной и только одной* пересадкой. Например, из **Л**ондона в **П**ариж можно попасть тремя разными непрямыми маршрутами — через другие города, однако из **Л**ондона в **Э**динбург ни одного маршрута с пересадками нет. Число прямых маршрутов или маршрутов с одной остановкой — элементы матрицы $A + A^2$. Это еще один пример способности матриц выделять суть из огромного множества данных — всего одной вычислительной процедурой.

В 1850-х годах небольшая группа математиков создала теорию матриц, но искала она решение задач чистой математики. С прикладной точки зрения теория матриц оказалась «разгадкой без загадки». Но, как это обычно бывает, «загадки» возникли, и им нужны были разгадки. Одним из ранних приложений стала «матричная механика», элемент квантовой теории: ее исследовал в 1920-х Вернер Гейзенберг. Другим пионером прикладных аспектов теории матриц и матричной алгебры стала Ольга Таусски-Тодд, одно время занимавшаяся проектированием летательных аппаратов. На вопрос, как она открыла для себя матричную алгебру, Ольга ответила, что все вышло наоборот — матричная алгебра открыла ее. Таковы уловки математики.

В сухом остатке: Складываем числа горстями

40 Коды

Что общего у Юлия Цезаря с передачей современных цифровых сигналов? Если коротко — шифр и кодирование. Для отправки цифровых сигналов компьютеру или цифровому телевизору необходимо кодировать изображение и звук нулями и единицами — двоичным кодом, ибо приборы способны понимать лишь этот язык.

Цезарь ценил точность — она же важна для эффективной передачи цифровых сигналов. А еще Цезарю хотелось, чтобы его коды были ведомы ему одному — так же, как того хотят телевизионные спутниковые компании: пусть лишь оплатившие подписчики получают сигналы в понятном виде.

Рассмотрим для начала точность. Человеческий фактор и «помехи на линии» необходимо нейтрализовать. Математический подход позволяет нам сконструировать системы кодирования, обнаруживающие и исправляющие такие ошибки автоматически.

Обнаружение и исправление ошибок Один из первых двоичных кодов — азбука Морзе, оперирующая двумя символами — точками «•» и тире «—». В 1844 году американский изобретатель Сэмюэл Ф. Б. Морзе отправил из Вашингтона в Балтимор первое междугороднее сообщение, закодировав его по своему методу. Этот код, придуманный для электрического телеграфа середины XIX века, был не слишком эффективен. В азбуке Морзе буква А кодируется «•—», В — в виде «—•••», С — в виде «—•—•», остальные буквы — аналогично, разными сочетаниями точек и тире. Телеграфист, отправляющий буквосочетание «САВ», настучит последовательность «—•—•/•—/—•••». Невзирая на свои полезные качества, азбука Морзе, увы, уязвима для ошибок и совсем не пригодна для их исправления. Если телеграфисту-морзянщику нужно отправить «САВ», а он опечатался в одном тире в С,

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

55 до н. э.
Юлий Цезарь завоевывает Британию и применяет шифрование для общения со своими полководцами

Около 1750
Леонард Эйлер закладывает основу для криптографии на открытых ключах

забыл тире в A, а помехи на линии заменили тире на точку в B, до получателя дойдет сообщение «• • — •/•/— — • •», и он как ни в чем не бывало интерпретирует полученное как «FEZ».

Возьмем что-нибудь попроще — систему кодирования, состоящую лишь из 0 и 1, где 0 обозначает какое-нибудь одно слово, а 1 — другое. Допустим, главнокомандующий армией должен отправить сообщение войскам: «в атаку» или «выжидать». «В атаку» кодируется «1», а «выжидать» — «0». Если вдруг при передаче возникнет ошибка, получатель никогда этого не узнает, и будет отдана неправильная команда — с устрашающими последствиями.

Улучшить положение дел можно использованием кодовых слов из двух знаков. Если команду «в атаку» закодировать как 11, а «выжидать» как 00, уже станет проще. Ошибка в одну цифру даст нам 01 или 10 на выходе. Поскольку установленными кодовыми словами являются только 11 или 00, получатель точно поймет, есть ошибка в сообщении или нет. Преимущество такой системы именно в том, что ошибку можно заметить, однако по-прежнему непонятно, как ее исправить. Если получено сообщение 01, как нам понять, что было отправлено — 00 или 11?

Метод дальнейшего усовершенствования системы — удлинение слов кода. Если закодировать команду «в атаку» как 111, а «выжидать» — 000, ошибка в одну цифру будет заметна сразу, как и в предыдущем случае. Если нам известно, что больше одной ошибки возникнуть не может (разумное допущение: две ошибки в одном закодированном слове маловероятны), получатель сможет исправить эту ошибку. Например, если получено сообщение 110, правильным будет сообщение 111. По нашим правилам оно не может быть 000, поскольку это означает две ошибки в сообщении 110. В такой системе есть лишь два кодовых слова — 000 и 111, но они достаточно разнятся для того, чтобы возможная ошибка была замечена и исправлена.

По тому же принципу устроено автоматическое исправление ошибок при печати. Если напечатать «жевотное», текстовая программа обнаруживает ошибку и исправляет ее, подобрав наиболее похожее слово — «животное». В языке, правда, исправить любую ошибку таким способом не удастся: у напечатанного с ошибкой слова «кушка» нет уникального правильного эквивалента — слова «кошка», «пушка», «мушка», «кашка», «кишка» и многие другие равноудалены на одну ошибку от буквосочетания «кушка».

Современный двоичный код состоит из кодовых слов-блоков, собранных из нулей и единиц. Подбирая подходящие кодовые слова, достаточно далекие по написанию

1844	1920-е	1950	1970-е
Сэмюэл Б. Ф. Морзе передает первое сообщение с применением собственного кода	Разработана шифровальная машина «Энигма»	Ричард Хэмминг публикует основополагающий труд по определению и исправлению ошибок кодирования	Разработана криптография на открытых ключах

друг от друга, можно обеспечить и нахождение, и устранение ошибок. Кодовые обозначения азбуки Морзе слишком близки друг к другу в символах, однако современные системы кодировки, обеспечивающие передачу данных со спутников, могут быть настроены на автокорректирующий режим.

Длинные кодовые слова с высокой эффективностью исправления ошибок пересылать дольше, поэтому необходим компромисс между длиной и скоростью передачи. Полеты аппаратов НАСА в глубокий космос применяют кодировки, допускающие исправления до трех ошибок в одном закодированном слове, и этого, как выяснилось, достаточно для преодоления помех на линии.

Тайные шифры Юлий Цезарь желал хранить свои сообщения в тайне и для этого менял буквы в сообщениях местами в соответствии с ключом, который знал лишь он и его полководцы. Если бы ключ попал в чужие руки, враги могли бы разобрать эти шифровки. В Средние века Мария Стюарт отправляла шифрованные сообщения из тюрьмы. Мария желала свергнуть свою двоюродную тетку, королеву Елизавету I, однако ее зашифрованные сообщения перехватили. Ее код был затейливее римского способа шифровки путем перемены мест букв в соответствии с определенным алгоритмом: Мария Стюарт использовала метод замены слов, однако разгадать ключ и прочесть сообщение можно было, проанализировав частоту определенных букв и символов. Во время Второй мировой войны немецкий код «Энигма» был взломан – к нему нашли ключ. В этом случае задача стояла грандиозная, но шифры уязвимы всегда – вместе с закодированным сообщением передают и ключ к нему.

Поразительное развитие в области шифровки сообщений случилось в 1970-х. Вопреки всему, во что ранее верили, выяснили, что тайный ключ можно транслировать в общем доступе, а сообщение тем не менее останется по-прежнему недоступным. Так появилась криптография с открытым ключом. Этот метод основан на теореме 200-летней давности из области математики, прославленной своей бесполезностью.

Шифрование открытыми ключами Мистер Джон Отправлер, тайный агент, известный шпионскому братству как Джей, только что прибыл в город и желает отправить своему резиденту, доктору Родни Получингу, тайное сообщение – уведомить о своем прибытии. Его действия в этой связи довольно любопытны. Он отправляется в публичную библиотеку, добывает с полки городской справочник и отыскивает в нем д-ра Р. Получинга. В справочнике против этого имени он находит два номера – длинный (247) и короткий (5). Эта информация открыта всем и каждому, и как раз ее-то Джону Отправлеру хватит для шифровки сообщения – это попросту его, Джея, визитная карточка. Эта буква, J, 74-я по счету в каком-нибудь общедоступном списке слов.

Отправлер кодирует 74, вычислив результат деления 74^5 с неполным частным 247, т. е. выясняет, каков остаток от деления 74^5 на 247. Посчитать, сколько будет 75^5, можно с помощью бытового калькулятора, но важна точность:

$$74^5 = 74 \times 74 \times 74 \times 74 \times 74 = 2\ 219\ 006\ 624$$

и

$$2\ 219\ 006\ 624 = 8\ 983\ 832 \times 247 + 120,$$

таким образом, разделив это огромное число на 247, Отправлер получает в остатке 120. Его шифрованное сообщение — 120, его он и отправляет Получингу. Поскольку числа 247 и 5 общедоступны, зашифровать такое сообщение мог кто угодно. Но не кто угодно сможет его расшифровать. Д-р Р. Получинг располагает большей информацией. Его личный номер — 247 — результат умножения двух простых чисел, $p = 13$ и $q = 19$, однако это известно лишь ему одному.

Тут-то из закромов и извлекается древняя теорема, с которой стряхнул пыль Леонард Эйлер. Д-р Р. Получинг применяет знание о $p = 13$ и $q = 19$ и вычисляет значение a, для которого верно $5 \times a \equiv 1 \bmod (p - 1)(q - 1)$, где символ модульной арифметики $\equiv$ означает «сравнимы по модулю». Каково должно быть a, чтобы деление $5 \times a$ на $12 \times 18 = 216$ давало в остатке 1? Опуская вычисления, Получинг находит, что $a = 173$.

Поскольку лишь ему одному известны значения простых чисел p и q, никто, кроме д-ра Получинга, не сможет определить число 173. Зная это число, он может вычислить остаток от деления громадного числа 120^{173} на 247. Эту операцию на обычном калькуляторе не проделать, но при помощи компьютера — просто. Ответ — 74, о чем Эйлер знал еще двести лет назад. Добыв эту информацию, Получинг отыскивает в списке слово № 74 и узнает, что Джей в городе.

Можно возразить, дескать, взломщик кода мог обнаружить, что $247 = 13 \times 19$, и тогда шифровка оказалась бы раскрытой. Все верно. Однако принцип шифровки и расшифровывания будет тот же самый, примени д-р Получинг другое число вместо 247. Он мог бы выбрать два очень больших простых числа и перемножить их с результатом, гораздо большим, чем 247.

Найти два простых делителя очень большого числа практически невозможно. Каковы, например, делители 24 812 789 922 307? А можно выбрать числа и побольше. Система открытых ключей безопасна, и даже если объединить мощь нескольких суперкомпьютеров и успешно определить делители зашифрованного числа, д-ру Получингу нужно всего лишь взять еще большее число. Ему гораздо проще «смешать ящик черного и ящик белого песка», как в старинной задачке, чем любому взломщику разделить песок по цветам.

В сухом остатке: Держим сообщения в тайне

41 Высшее исчисление

Раздел математики под названием «комбинаторика» иногда называют высшим исчислением. Комбинаторика — это не сложение чисел в столбик в уме. Вопрос комбинаторики — не только «сколько?», но и «как именно?». Задачи этой дисциплины часто просты в формулировках, не сопровождаются никакими громоздкими построениями математической теории; нет нужды в глубоком знании основ, можно сразу браться за дело. Оттого комбинаторные задачки столь привлекательны. Однако к ним должно прилагаться предупреждение: могут вызывать привыкание и бессонницу.

Сказка Сент-Айвза Комбинаторикой можно развлекаться с младых ногтей. Одна старинная колыбельная есть не что иное, как комбинаторная задачка:

Раз в Сент-Айвз пошел я вдруг,
Навстречу мне дядька и семь подруг;
Есть у каждой семь тюков,
Ну а в каждом — семь котов,
Каждый кот — отец семи.
Дев, тюков, котов, котят —
Сколько их в Сент-Айвз хотят?

Последняя строка — с подвохом. Допущение по умолчанию заключается в том, что лишь рассказчик идет «в» Сент-Айвз, поэтому ответ — «один». Некоторые и рассказчика в расчет не берут и отвечают «никто».

Обаяние этого стишка — в его двусмысленности, а также в том, что из него можно вывести много разных загадок. Можно задать, например,

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 1800 до н. э.
Написан египетский папирус Ринда

Около 1100
Бхаскара работает с преобразованиями и комбинациями

такой вопрос: сколько было ходоков из Сент-Айвза? И опять важно, как интерпретировать вводные. Можно ли быть уверенными, что дядька и его семь подруг вместе шли из Сент-Айвза?

Подруги шли вместе с дядькой в момент встречи с рассказчиком или встретились с рассказчиком отдельно от дядьки? Первое требование к комбинаторной задаче — установление допущений заранее.

Допустим, весь ансамбль топал по единственной дороге, ведущей от этого корнуоллского прибрежного местечка, а «девы, тюки, коты и котята» шли вместе. Так сколько же всех и вся перемещалось из Сент-Айвза? Решение приведем в таблице:

дядька	1	1
подруги	7	7
тюки	7×7	49
коты	$7 \times 7 \times 7$	343
котята	$7 \times 7 \times 7 \times 7$	2401
Итого		**2801**

В 1858 году шотландский антиквар Александр Ринд, посещая Луксор, обнаружил 5-метровый папирус 1800-х годов до н. э., испещренный египетскими математическими значками. Ринд купил его. Несколько лет спустя папирус приобрел Британский музей, и иероглифы были расшифрованы. Задача № 79 папируса Ринда — о домах, котах, мышах и пшенице, похожая на задачу о котятах, котах, мешках и подругах из Сент-Айвза. И в той и в другой фигурируют степени семерки и сходный анализ данных. У комбинаторики, похоже, древняя история.

Факториалы Задача очередей знакомит нас с первым оружием комбинаторного арсенала — с *факториалами*. Предположим, **А**лан, **Б**райен, **В**алери, **Г**рег и **Д**эйзи встали в очередь в таком порядке:

Д В А Б Г,

Дэйзи — во главе очереди, а за ней **В**алери, **А**лан, **Б**райен и **Г**рег. Меняя людей местами, получим другие варианты очередностей; сколько в данном случае различных вариантов очереди может быть?

Искусство счисления в этой задаче зависит от *выбора*. Есть 5 возможных возглавляющих очередь, и как только мы выбрали, кого поставить первым, остается 4 варианта, кого поставить вторым, и т. д. Добравшись до последней позиции, мы никакого выбора

1850
Томас Киркман формулирует задачу о 15 школьницах

1930
Фрэнк Рэмзи работает с комбинаторикой

1971
Дижен К. Рай-Чодхури и Ричард М. Уилсон доказывают существование систем Киркмана в общем виде

себе не оставляем — на последнем месте будет единственный оставшийся человек. Таким образом получим $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ вариантов построения очереди. Если взять 6 человек, вариантов будет $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$, если 7 человек, то $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ возможных последовательностей людей в очереди.

число	факториал
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40 320
9	362 880

Число, получаемое путем умножения последовательного ряда целых чисел, называется факториалом. Факториалы — явление в математике настолько частое, что их записывают как 5! (читается «пять факториал»), а не $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Рассмотрим первые несколько факториалов (будем считать, что 0! равен 1). С ходу видно, что «небольшие» факториальные выражения дают в результате «большие» факториальные числа. Число n может не быть большим, зато $n!$ окажется впечатляющим.

Предположим, нам все еще зачем-нибудь нужно выстроить 5 человек в очередь, но теперь мы можем отбирать из 8 человек? **А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**, **Е**, **Ж** и **З**. Анализ, впрочем, останется прежним. У нас есть 8 вариантов, кого поставить первым, 7 — вторым и т. д. Но на этот раз последним человеком может быть любой из четверых. Число возможных вариантов таким образом:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720.$$

И в этом случае можно применить факториальную форму записи, потому что:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{8!}{3!}.$$

Комбинации В очереди важна *очередность*. Две очереди

Д В А Б Г **Г А В Д Б**

составлены из одних и тех же букв, тем не менее это разные очереди. Нам уже известно, что вариантов таких очередей может быть 5!. Если нужно посчитать, сколько существует способов отобрать 5 человек из 8 *независимо от порядка* отбора, нужно разделить $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ на 5!. Число вариантов отбора 5 человек из 8 таким образом:

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56.$$

Обозначим число комбинаций как C, тогда ${}^{8}C_{5}$ – форма записи полученного результата:

$$C^8_5 = \frac{8!}{3!\,5!} = 56.$$

Правила Британской государственной лотереи предполагают выбор 6 номеров из 49 — сколько в этом случае будет вариантов?

$$C^8_5 = \frac{49!}{43!\,6!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13\,983\,816.$$

Выигрывает лишь одна комбинация, а значит, сорвать большой куш – 1 шанс из примерно 14 миллионов.

Задача Киркмана Комбинаторика – обширная область и, несмотря на свою древность, активно развивающаяся последние 40 лет, спасибо компьютерным технологиям. Задачи теории графов, латинские квадраты и т. п. можно рассматривать как часть современной комбинаторики.

Суть комбинаторики ухватил мастер предмета, преп. Томас П. Киркман, трудившийся в те времена, когда комбинаторика считалась досуговой математикой. Киркман внес немалый вклад и в дискретную геометрию, и в теорию групп, и в комбинаторику, но никогда не служил в университетах. Имя этого человека навсегда увековечил ребус, упрочивший его репутацию серьезного математика. В 1850 году Киркман предложил «задачу о 15 школьницах», в которой школьницы ежедневно ходят в церковь в пять рядов по три в каждом. Если вам надоели судоку, можете поломать голову об эту шараду. Требуется так организовать ежедневное расписание, чтобы никакие две девочки не шли вместе одного раза в неделю. Для целей решения задачи назовем наших школьниц со строчной и прописной букв так: **а**йрин, **б**еатрис, **в**анесса, **г**лория, **д**ороти, **з**енобия, **к**эролайн, **А**гнес, **Б**ернис, **В**иолетт, **Г**винет, **Д**эниэл, **З**ои, **К**лэр и **Ф**иона; обозначим их **а**, **б**, **в**, **г**, **д**, **з**, **к**, **А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**, **З**, **К** и **Ф** соответственно.

У задачи Киркмана есть 7 отдельных решений; рассмотрим одно – «циклическое», оно получается путем «перебора по кругу». Тут-то нам и пригодится обозначение школьниц буквами.

Понедельник			Вторник			Среда			Четверг			Пятница			Суббота			Воскресенье		
а	А	Ф	б	Б	Ф	в	В	Ф	г	Г	Ф	д	Д	Ф	з	З	Ф	к	К	Ф
б	Д	Г	в	З	Д	г	К	З	д	А	К	з	Б	А	к	В	Б	а	Г	В
в	Б	К	г	В	А	д	Г	Б	з	Д	В	к	З	Г	а	К	Д	б	А	З
г	з	к	д	к	а	з	А	Б	к	б	в	а	в	г	б	г	д	в	д	з
д	З	В	з	К	Г	к	А	Д	а	Б	З	б	В	К	в	Г	А	г	Д	В

Циклическим это решение называется потому, что каждый следующий день расстановка девочек в шеренги меняется с **а** на **б**, с **б** на **в** и т. д. до **к** на **а**. То же применительно к девочкам с прописных букв – **А** на **Б**, **Б** на **В** и т. д.; **Ф**иона остается всегда на одном и том же месте.

Причина такого выбора обозначений в том, что ряды отвечают линиям в геометрии Фано (см. стр. 114). Задача Киркмана – не просто салонная игра, это часть самой что ни на есть математики.

В сухом остатке: Сколько комбинаций?

42 Волшебные квадраты

«Математик, — писал Годфри Херолд Харди, — подобно художнику или поэту, есть создатель узоров». Волшебные квадраты — это «узоры», занимательные даже по математическим меркам, и находятся они на границе математики, перегруженной символами, и пленительных очертаний, что так дороги любителям ребусов.

Волшебный (магический) квадрат — сетка-таблица, в которой в каждую клетку вписаны разные целые числа так, что и любой горизонтальный ряд, и любой вертикальный столбец, и любая диагональ дают в сумме одно и то же число.

a	*b*
c	*d*

Квадраты с одним рядом и одним столбцом — тоже волшебные, говоря строго, однако они скучные, и поэтому ну их. Волшебного квадрата два на два существовать не может. Если бы он был, то имел бы вид как на рисунке слева. Поскольку сложение чисел в ряду и в столбце должно давать одну и ту же величину, то $a + b = a + c$. Это означает, что $b = c$, а это противоречит установке, что все числа должны быть разными.

Квадрат Ло Шу Поскольку квадрата 2×2 не существует, рассмотрим квадрат 3×3 и попытаемся сконструировать сетку. Начнем с *нормального* волшебного квадрата — такого, в котором сетка заполнена последовательными числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

Для такого маленького квадрата можно попытаться построить сетку 3×3 методом тыка, но для начала попробуем сделать кое-какие выводы, чтобы упростить себе задачу. Если сложить все числа в сетке, получится

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45;$$

это сумма всех трех рядов. Значит, каждый ряд (а также столбец и диагональ) должны давать в сумме 15. Теперь взглянем на среднюю

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 2800 до н. э.
Рождение легенды о квадрате Ло Шу

Около 1690
Симон де ла Лубер предлагает так называемый «сиамский метод» построения волшебных квадратов

ячейку – назовем ее *c*. Через с проходят две диагонали, а еще – средний ряд и средний столбец.

Сложим числа в этих четырех линиях и получим 15 + 15 + 15 + 15 = 60; это число должно равняться сумме всех чисел в этом квадрате, а сверх того – значению *c*, взятому трижды. Из уравнения $3c + 45 = 60$ становится ясно, что *c обязано* равняться 5. Аналогично можно выяснить и другие факты – например, что единица не может оказаться в угловой ячейке. Итак, собрав некоторые подсказки, можем попытаться заполнить квадрат «от фонаря». А ну-ка!

Конечно же, нам бы хотелось иметь совершенно системный *метод* конструирования волшебных квадратов. Один такой метод в конце XVII века обнаружил Симон де ла Лубер, французский посол при дворе короля Сиама. Лубер увлекался китайской математикой и описал метод построения волшебных квадратов с нечетным количеством рядов и столбцов. Этот метод применяется так: помещаем единицу в середину первого ряда, а дальше «двигаемся куда глаза глядят» и размещаем 2 и остальные числа. Если ячейка занята, вписываем следующее по порядку число под текущим.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Решение для квадрата 3 × 3 сиамским методом

Примечательно, что нормальный волшебный квадрат с тремя рядами и тремя столбцами может быть всего один. Любой другой волшебный квадрат 3 × 3 можно получить из этого поворотом чисел вокруг центральной ячейки и/или отражением их относительно среднего ряда или среднего столбца. Он называется квадратом Ло Шу и был известен в Китае примерно за 3000 лет до н. э. По легенде, его впервые увидели на спине черепахи, появившейся из реки Ло. Местные приняли это за знак богов, что мор не закончится, покуда не увеличатся подношения верующих.

Если волшебный квадрат 3 × 3 всего один, сколько бывает волшебных квадратов 4 × 4? Ответ поражает воображение: 880, и все разные; теперь держитесь: волшебных квадратов пятого порядка – 2 202 441 792. Сколько существует волшебных квадратов абстрактного порядка *n*, нам неведомо.

Квадраты Дюрера и Франклина Волшебный квадрат Ло Шу хорошо известен и из-за своей древней истории, и из-за уникальности, но один квадрат 4 × 4 тоже стал легендой – благодаря связи с великим художником. У него, кроме того, есть множество свойств, отличающих его от остальных заурядных 880. Речь о квадрате 4 × 4 Альбрехта Дюрера, изображенном на гравюре «Меланхолия I» 1514 года.

1693

Бернар Френикль де Бесси перечисляет все 880 возможных волшебных квадратов 4 × 4

1770

Леонард Эйлер представляет волшебные квадраты, составленные из квадратов чисел

1986

Ли Сэллоуз создает волшебный квадрат из слов

В квадрате Дюрера все ряды дают в сумме 34, равно как и столбцы, диагонали и меньшие квадраты 2 × 2, из которых собран полный, 4 × 4. Дюрер даже ухитрился «подписать» свой шедевр годом окончания — в середине нижнего ряда.

Американский ученый и дипломат Бенджамин Франклин заметил, что построение волшебных квадратов — полезное упражнение для остроты ума. Франклин оказался мастером таких построений, и поныне математики не постигают, как ему это удавалось: большие волшебные квадраты наудачу не построишь. Франклин признавался, что в юности просадил уйму времени за этим занятием, хотя «арифметикой» по молодости не увлекался. Вот пример волшебного квадрата, открытого юным Франклином.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

В этом нормальном волшебном квадрате можно обнаружить всевозможные симметрии. Все ряды, столбцы и диагонали дают в сумме 260, равно как и «ломаные диагонали» — они выделены серым. Но и это еще не все: сумма центрального квадрата 2 × 2 и четырех угловых ячеек тоже дает в сумме 260. Приглядитесь — и обнаружите кое-что интересное для любого малого квадрата 2 × 2.

Квадрирование квадратов В ячейках некоторых волшебных квадратов можно разместить разные числа во второй степени. Задача построения таких квадратов была сформулировна французским математиком Эдуардом Люка в 1876 году. Пока таких квадратов размером 3 × 3 обнаружено не было, но один, правда, почти получился.

Все ряды, столбцы и одна диагональ этого квадрата в сумме дают волшебное число 21 609, но вот другая диагональ, увы, подкачала — $127^2 + 113^2 + 97^2 = 38\,307$. Если вас одолевает искушение самостоятельно построить такой квадрат, примите во внимание доказанный результат: центральная ячейка должна быть больше $2{,}5 \times 10^{25}$, так что с меньшими числами и возиться не стоит. Это серьезная математика, связанная с эллиптическими кривыми, — темой «Великой теоремы Ферма». Также было доказано, что не существует волшебных квадратов 3 × 3 из чисел ни в третьих, ни в четвертых степенях.

127^2	46^2	58^2
2^2	113^2	94^2
74^2	82^2	97^2

Поиски квадратов, составленных из квадратов, для бóльших фигур увенчались успехом. Волшебные квадраты квадратов 4 × 4 и 5 × 5 существуют. В 1770 году Эйлер предъявил один такой квадрат — правда, не рассказал, как именно построил его. Такие квадраты, как выяснилось, связаны с изучением алгебры кватернионов — мнимых четырехмерных чисел.

Экзотические волшебные квадраты У больших волшебных квадратов встречаются потрясающие свойства. Семейство волшебных квадратов 32 × 32 произвел на свет Уильям Бенсон, великий дока в своем деле. В этих системах и сами числа, и их квадраты, и их кубы составляют волшебные квадраты. В 2001 году удалось собрать систему 1024 × 1024 – в ней элементы во всех степенях вплоть до пятой составляют волшебные квадраты. И подобных результатов много.

Если исходные требования щадящие, можно понаделать целую уйму других волшебных квадратов. Нормальные волшебные квадраты – будничное явление математики. Упразднив требование к равенству суммы диагональных элементов суммам элементов в рядах и столбцах, получим тьму-тьмущую специфических результатов. Можем поискать такие квадраты, в которых все элементы – только простые числа, или покопаться в других геометрических фигурах с «волшебными свойствами». Уход с плоскости в более высокие измерения предполагает наличие волшебных кубов и гиперкубов.

Но приз за самый замечательный волшебный квадрат на свете – за находчивость, по крайней мере, – следует присудить скромному квадрату 3 × 3, составленному голландским инженером-электронщиком и остряком англичанином Ли Сэллоузом:

5	22	18
28	15	2
12	8	25

Что же в нем примечательного? Для начала запишем числа словами:

five	*twenty-two*	*eighteen*
twenty-eight	*fifteen*	*two*
twelve	*eight*	*twenty-five*

Теперь посчитаем количество *букв* в каждом слове:

4	9	8
11	7	3
6	5	10

Во-первых, это волшебный квадрат, состоящий из последовательных чисел от 3 до 11. Во-вторых, сумма букв волшебных сумм обоих квадратов 3 × 3 (45 и 21, т. е. *forty-five* и *twenty-one*, соответственно) равна девяти, 3 × 3 = 9.

В сухом остатке: Математическое чародейство

43 Латинские квадраты

Несколько лет мир сходил с ума по судоку. На всей планете люди обгрызали карандаши и ручки, ожидая вдохновения — и правильного числа, подходящего по значению к вот этой ячейке. Тут должно быть 4 или 5? А может, 9. Пассажиры выбирались по утрам из электричек, вложив в эти шарады больше умственных усилий, чем потребуется на весь оставшийся день. А вечером на плите горит ужин: так все-таки 5 или 4? Или 7? Все эти люди играются с латинскими квадратами — и все они в этот момент математики.

	4		8		3			
		7						3
		9	7			2	6	
3				1		7		9
			6	9	8			
1		5		2				6
	2	3			6	5		
6						1		
			5		2		8	

Судоку раскрыт В судоку у нас имеется сетка 9 × 9, в некоторых ячейках ее проставлены числа. Цель — заполнить пустые ячейки, исходя из уже вписанных в качестве подсказки. В каждом ряду и каждом столбце должно быть по одному разу вписано каждое число из ряда 1, 2, 3, ..., 9, и такое же условие — для малых внутренних квадратов 3 × 3.

Считается, что судоку («одиночные цифры») изобрели в Японии в 1970-х. В Японии это развлечение приобрело популярность в 1980-х, после чего к 2005 году разошлось по миру. Привлекательность головоломки в том, что она, в отличие от кроссвордов, не требует начитанности для достижения результата, однако, аналогично решению кроссвордов, может быть вполне увлекательной. У подверженных зависимости от обеих форм самоистязания много общего.

Латинские квадраты 3 × 3 Квадратная сетка, содержащая по одному символу в каждом ряду и каждом столбце, называется латинским квадратом. Число символов равно размеру квадрата

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1779

Леонард Эйлер исследует теорию латинских квадратов

1900

Гастон Тарри доказывает, что ортогональных латинских квадратов шестого порядка быть не может и называется «порядком» этого квадрата. Можем мы заполнить пустую сетку 3 × 3 так, чтобы в каждом столбце и каждом ряду было в точности по одному символу *a*, *b* и *c*? Если да, получим латинский квадрат третьего порядка.

a	*b*	*c*
b	*c*	*a*
c	*a*	*b*

Вводя понятие латинского квадрата, Леонард Эйлер назвал его «новым видом волшебного квадрата».

Однако, в отличие от волшебных квадратов, латинские квадраты к арифметике отношения не имеют, а символы в них не обязаны быть числами. Само название их означает, что символы, вписанные в ячейки, взяты из латинского алфавита, а греческие Эйлер применял к другим квадратам.

Латинский квадрат 3 × 3 легко записать. Если считать *a*, *b* и *c* днями недели – допустим, понедельником, средой и пятницей, такой квадрат можно применять к составлению расписаний между двумя группами людей. Первая команда состоит из **Л**эрри, **М**эри и **Н**энси, а вторая – из **Р**осса, **С**офи и **Т**ома.

	Р	**С**	**Т**
Л	*a*	*b*	*c*
М	*b*	*c*	*a*
Н	*c*	*a*	*b*

К примеру, **М**эри из первой команды встречается с **Т**омом из второй по понедельникам (на пересечении ряда **М** со столбцом **Т** видим *a* = понедельник). Латинский квадрат гарантирует, что в каждой паре участников разных команд состоится по встрече, и никаких накладок с датами не случится.

Эта версия латинского квадрата 3 × 3 – не единственная. Если считать *A*, *B* и *C* темами встреч, обсуждаемыми первой и второй командами, можно составить латинский квадрат-график обсуждений, согласно которому каждый коллега из одной группы поговорит с каждым коллегой из другой на разные темы:

	Р	**С**	**Т**
Л	*A*	*B*	*C*
М	*C*	*A*	*B*
Н	*B*	*C*	*A*

1925

Роналд Э. Фишер предлагает использовать латинские квадраты в статистических экспериментах

1960

Предположение Эйлера о невозможности существования определенных пар латинских квадратов опровергнуто Раджем Бозе, Эрнестом Паркером и Сарадчандрой Шриканде

1979

В Нью-Йорке изобретены судокуподобные головоломки

Так, **М**эри из первой команды поговорит на тему *C* с **Р**оссом, на тему *A* – с **С**офи, а на тему *B* – с **Т**омом.

Но *когда* обсуждения должны состояться, между *кем и кем* и на *какую тему* именно? Как должно выглядеть такое сложносоставное расписание? К счастью, можно совместить два латинских квадрата посимвольно и получить составной латинский квадрат, в котором каждая из возможных девяти пар дней и тем возникнет в точности один раз.

	Р	**С**	**Т**
Л	*a, A*	*b, B*	*c, C*
М	*b, C*	*c, A*	*a, B*
Н	*c, B*	*a, C*	*b, A*

Еще одна интерпретация того же квадрата – старинная «задача о девяти офицерах», в которой девять офицеров, служащих в трех разных полках *a*, *b* и *c* в трех рангах *A*, *B* и *C* расставлены на параде так, чтобы каждая колонна и шеренга имела по офицеру каждого полка и ранга. Латинские квадраты, совмещенные таким способом, называются «ортогональными». Случай 3 × 3 довольно прост, однако подобрать ортогональные латинские квадраты большего размера куда как нелегко. Это обнаружил Эйлер.

Для латинских квадратов 4 × 4 «задача о 16 офицерах» формулируется так: выложить 16 фигурных карт из игральной колоды в каре так, чтобы в каждом ряду и столбце оказалось по одной карте каждого ранга (туз, король, дама, валет) и каждой масти (пики, трефы, червы, бубны). В 1782 году Эйлер сформулировал ту же задачу для «36 офицеров». По сути он искал два ортогональных квадрата шестого порядка. Ему это не удалось, из чего он сделал вывод, что не существует пар ортогональных латинских квадратов порядков 6, 10, 14, 18, 22… Можно ли это доказать?

Тут-то и появился математик-любитель Гастон Тарри, соцслужащий из Алжира. Он рассмотрел примеры разных латинских квадратов и к 1900 году подтвердил вывод Эйлера для одного случая: не существует пары ортогональных латинских квадратов шестого порядка. Математики сочли, разумеется, что Эйлер прав и в отношении порядков 10, 14, 18, 22…

В 1960 году совместными усилиями трех математиков математический мир был ошарашен новостью: Эйлер ошибался *во всех* остальных случаях. Радж Бозе, Эрнест Паркер и Сарадчандра Шриканде доказали, что пары ортогональных латинских квадратов порядков 10, 14, 18, 22… существуют. Единственное исключение (не считая тривиальных 1 и 2 порядка) – квадрат шестого порядка.

Итак, мы знаем, что существуют пары ортогональных латинских квадратов порядка 3. Для порядка 4 можем подобрать три попарно ортогональных квадрата. Можно доказать, что для латинского квадрата порядка n не бывает больше $n - 1$ попарно ортогональных латинских квадратов, т. е., например, для $n = 10$ попарно ортогональных квадратов не может быть более 9. Определить их – другое дело. На сегодня никому еще не удалось найти три латинских квадрата порядка 10, которые были бы попарно ортогональны.

В чем прок латинских квадратов? Знаменитый статистик Роналд Э. Фишер усмотрел в латинских квадратах практический смысл. Трудясь на Ротэмстедской опытной станции, Хертфордшир, Великобритания, он с их помощью совершил переворот в сельском хозяйстве. Целью Фишера было исследование эффективности удобрений для повышения урожайности. В идеале хотелось бы высаживать зерновые культуры в идентичные по составу почвы, чтобы качество почв не являлось неблагоприятным фактором, влияющим на объемы урожаев. Тогда можно было бы применять различные удобрения исходя из уверенности, что «досадная» разница в качестве почв снята со счетов. Единственный способ добиться такой идентичности качества – использовать одну и ту же почву, однако выкапывать и пересаживать растения практически реализуемо с трудом. Даже если бы это было технически возможно, погодные условия создали бы другие «досадные различия».

Обойти это затруднение помогли латинские квадраты. Возьмем четыре разных удобрения. Поделим квадратное поле на 16 участков – т. е. реализуем латинский квадрат на почве, отличающейся по качеству и «вертикально», и «горизонтально». Применим четыре разных удобрения случайным образом – на схеме они обозначены как *a*, *b*, *c* и *d*, т. е. в каждом ряду и каждом столбце каждый вид удобрений окажется единожды: так попытаемся устранить разницу в качестве почв. Предположив, что другие факторы тоже могут влиять на объем урожая, с ними мы сможем поступить аналогично. Допустим, время внесения удобрений также имеет значение. Обозначим периоды времени в течение дня как *A*, *B*, *C* и *D*, применим ортогональные латинские квадраты как модель для сбора данных. Таким способом мы добьемся внесения каждого вида удобрения в разные временны́е периоды на всех участках. Схема эксперимента выглядит так:

a, время *A*	*b*, время *B*	*c*, время *C*	*d*, время *D*
b, время *C*	*a*, время *D*	*d*, время *A*	*c*, время *B*
c, время *D*	*d*, время *C*	*a*, время *B*	*b*, время *A*
d, время *B*	*c*, время *A*	*b*, время *D*	*a*, время *C*

Другие факторы можно устранить аналогично, составив еще более сложные латинские квадраты. Эйлер и не мечтал, что его задача об офицерах найдет применение в сельскохозяйственных экспериментах.

В сухом остатке: Разоблачение судоку

44 Математика денег

Норман отлично продает велосипеды — всех бы пересадил на них. Поэтому когда к нему в магазин приходит некто и незамедлительно покупает велосипед за 99 фунтов, Норман совершенно счастлив. Покупатель расплачивается чеком на 150 фунтов, но банки уже закрыты, и Норман просит соседа обналичить чек, после чего возвращается, дает гостю 51 фунт сдачи, и тот уезжает на приличной скорости. Далее следуют неприятности. Чек обналичить не удается, сосед требует свои деньги назад, и Норману приходится брать взаймы у друга. Велосипед стоил в закупке 79 фунтов. Так сколько же всего денег потерял Норман?

Идея этого маленького ребуса пришла в голову великому придумщику загадок Генри Дьюдни. Это математика денег в некотором смысле, но все же — просто загадка про деньги. Она показывает, как деньги зависят от времени, а инфляция жива и здравствует. В 1920-х годах, когда этот ребус был предложен, велосипед Дьюдни стоил покупателю 15 фунтов. Победить инфляцию можно, закладывая проценты с дохода и капитала. И вот это уже серьезная математика и современный финансовый рынок.

Сложные проценты Есть два вида процентов доходности — простые и сложные. Обратим прожектор нашего математического внимания на двух братьев, Сметливого Саймона и Простака Питера. Их отец дает каждому по 1000 фунтов, и оба кладут их в банк. Сметливый Саймон всегда пользуется счетом со сложными процентами, а Простак Питер больше любит поступать по старинке и предпочитает счета с простыми процентами. Когда-то сложный процент воспринимался как лихоимство, и на «деляг» косились

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 3000 до н. э.

Вавилоняне применяют шестидесятеричную систему счисления к денежным взаиморасчетам

1494

Лука Пачоли публикует финансовые таблицы и описание двойной бухгалтерии неодобрительно. Ныне сложный процент – обыденность, часть современной денежной системы. Сложный процент – это проценты с процентов, за это его Саймон и любит.

У простого процента такой завитушки нет, его рассчитывают от стартовой суммы, которую называют «основным капиталом». Питеру легко в этом разобраться: основной капитал зарабатывает каждый год одну и ту же сумму.

Говоря о математике, всегда полезно иметь в союзниках Альберта Эйнштейна, однако верить, что именно он назвал сложный процент величайшим изобретением всех времен, не стоит, хотя формула сложного процента гораздо ценнее с практической точки зрения, нежели Эйнштейнова $E = mc^2$, и с этим не поспоришь. Если вы откладываете деньги, занимаете их, пользуетесь кредитной картой, вступаете в ипотеку или покупаете пожизненную ренту, формула сложного процента втихаря работает на (или против) вас. Что означают символы в этой формуле? Буквой P обозначен основной капитал (деньги, которые вы откладываете или одалживаете), i – процентная ставка, деленная на 100, а n – число временных периодов.

$$A = P \times (1 + i)^n$$

Формула вычисления сложного процента

Саймон размещает свои 1000 фунтов на счете и получает ежегодно 7% дохода. Сколько он получит за три года? В данном случае $P = 1000$, $i = 0{,}07$, $n = 3$, A – общая сумма, получаемая по формуле сложного процента, и она равна 1225,04 фунта.

Счет Питера – тоже 7%-ный, но процент у него простой. Какие деньги заработает за три года Питер? В первый год он получит 70 фунтов, столько же – во второй и в третий. Таким образом проценты составят 3 × 70 = 210 фунтов, итого общая сумма на счете – 1210 фунтов. Инвестиционное решение Саймона, очевидно, выгоднее.

Суммы, получающиеся в результате начисления сложных процентов, могут расти очень споро. Это хорошо, если вы откладываете, а если занимаете – совсем не хорошо. Ключевой компонент сложного процента – период, за который происходит начисление. Саймон слыхал о системе, по которой начисление происходит еженедельно, по 1%, т. е. по одному пенни на каждый фунт. Сколько же он выиграет по этой схеме?

Питер считает, что знает ответ: он предлагает умножить ставку по вкладу (1%) на 52 (число недель в году), и тогда выйдет 52% годовых, т. е. 520 фунтов дохода и 1520 фунтов общей суммы на счете. Но Саймон напоминает ему о чародейских свойствах сложного процента и о формуле расчета сложного процента.

1718
Абрахам де Муавр исследует статистику смертности и основы теории пожизненной ренты

1756
Джеймс Додсон публикует «Первые лекции о страховании»

1848
В Лондоне основан Институт актуариев

Если P = 1000 фунтов, i = 0,01, а n = 52, Саймон получает по формуле 1000 фунтов × $(1{,}01)^{52}$. Калькулятор сообщает ему общую сумму в 1677,69 фунта, а это гораздо больше суммы, прикинутой Простаком Питером. У Саймона выходит годовой процент доходности в 67,769%, что выше Питеровых 52%.

Питер впечатляется, однако его деньги уже в банке под простой процент. Он задумывается, сколько потребуется времени, чтобы вложенная им сумма удвоилась? Ежегодно он получает 70 фунтов дохода, поэтому ему надо разделить 1000/70. Выходит 14,29, т. е. через 15 лет в банке у него точно будет больше 2000 фунтов. Нескоро. Чтобы доказать брату превосходство сложного процента над простым, Саймон берется рассчитать время удвоения своего капитала. Это чуточку сложнее, но приятель подсказывает ему правило 72.

Правило 72 Для установленной процентной ставки правило 72 — отличный способ сориентироваться, сколько периодов времени должно пройти, чтобы вложения удвоились. Саймону интересно прикинуть время в годах, но и на месяцы это правило тоже распространяется. Чтобы выяснить период удвоения капитала, от Саймона требуется лишь разделить 72 на значение процентной ставки. Расчет таков: 72/7 = 10,3, и Саймон может сообщить брату, что его инвестиции удвоятся за 11 лет — гораздо быстрее Питеровых 15. Это правило приблизительно, однако полезно для принятия быстрых решений.

Текущая стоимость Отец Сметливого Саймона так воодушевляется смышленостью сына, что отводит его в сторонку и говорит: «Дам-ка я тебе 100 000 фунтов». Саймон трепещет. Отец добавляет условие: он даст 100 000 фунтов Саймону, когда тому стукнет 45, а это случится лишь через 10 лет. Саймон несколько обескуражен.

Саймону, конечно же, хочется просаживать деньги сейчас, а не потом, но, очевидно, пока не получится. Он отправляется в банк и обещает тамошним хозяевам 100 000 фунтов через 10 лет. Банк отвечает, что через 10 лет 100 000 фунтов будут не тем же самым, что сейчас. Банку нужно прикинуть объем инвестиций сейчас, а реализовать эти инвестиции в размере 100 000 фунтов удастся через 10 лет. Эту сумму они и готовы будут одолжить Саймону. Банк считает, что ежегодный рост в 12% принесет им удовлетворительный доход. Какова же сумма, которая через 10 лет превратится в 100 000 фунтов при 12%-ной ставке доходности? И в этом случае можно применить формулу сложного процента. Теперь нам известно значение A = 100 000 фунтов, а рассчитать нам необходимо значение P, т. е. текущее значение A. При n = 10 и i =0,12 банк готов будет ссудить Саймону сумму в $100\,000/1{,}12^{10}$ = 32 197,32 фунта. Саймон, конечно, несколько ошеломлен малостью получившейся суммы, но на новый «порше» ему все равно хватит.

Как обращаться с регулярными платежами? Итак, отец пообещал Саймону 100 000 фунтов через 10 лет, и ему теперь надо копить деньги. Он планирует собрать эту сумму, добавляя деньги на свой сберегательный счет в конце каждого года в течение десяти лет, и тогда к концу этого периода сможет выдать обещанные Саймону фунты, а Саймон — вернуть их банку в счет погашения взятого кредита.

Отец Саймона отыскивает подходящий банк и открывает счет на 10 лет под 8% годовых. Он поручает Саймону рассчитать ежегодные платежи. Формула сложного процента позволяла Саймону вычислить единоразовый платеж (основной капитал), а теперь ему нужно посчитать десять разных платежей, вносимых постепенно. Если в конце каждого года необходимо произвести регулярный платеж R при процентной ставке i, сумма, накопленная через n лет, рассчитывается по формуле регулярных платежей.

$$S = R \times \frac{((1+i)^n - 1)}{i}$$

Формула вычисления регулярных платежей

Саймон знает, что $S = 100\,000$, $n = 10$, а $i = 0{,}08$, и получает по формуле $R = 6902{,}95$ фунта.

Теперь у Саймона есть новехонький «порше» — спасибо банку, но машине нужен гараж. Саймон решает взять ипотечный кредит в 300 000 фунтов и купить дом, а взятую сумму он будет отдавать последовательностью регулярных платежей в течение 25 лет. Он рассматривает поставленную задачу так: 300 000 — текущая стоимость множественных платежей, которые предстоит сделать; вычислить суммы годовых платежей не составляет труда. Отец опять не нарадуется и решает применить смекалку сына еще раз: он только что получил кругленькую сумму пенсионных отчислений — 150 000 фунтов — и желает приобрести пожизненную ренту. «Хорошо, — говорит Саймон, — применим излюбленную формулу, математика та же самая. Вместо того чтобы брать у ипотечной компании деньги, которые я выплачиваю регулярными взносами, дай им деньги ты — и тогда они будут регулярно платить тебе».

Кстати, ответ на загадку Генри Дьюдни — 130 фунтов: 51 фунт Норман отдал жулику-покупателю, а 79 фунтов — себестоимость велосипеда.

В сухом остатке: Сложный процент выгоднее

45 Задача о диете

Таня Смит серьезно относится к занятиям спортом. Она ходит в спортзал каждый день и пристально следит за диетой. Таня работает там и сям и деньгами не бросается. Ей важно усваивать ежемесячно правильное количество минералов и витаминов, чтобы оставаться подтянутой и здоровой. Эти количества определяет ее тренер. Он считает, что будущим олимпийским чемпионам необходимо не менее 120 мг витаминов и не менее 880 мг минералов в месяц. Чтобы не сбиваться с режима, Таня полагается на две пищевые добавки. Одна — сухая, торговой марки «Брикетто», а другая — жидкая, известная на рынке под маркой «Пейже». Задача Тани — определить, сколько каждой добавки ей необходимо приобретать ежемесячно, чтобы тренер был доволен.

Классическая задача о диете — здоровое питание за минимальные деньги. Это прототип линейного программирования — предмета, получившего развитие в 1940-х, а ныне широко применяемого для самых разных задач.

В начале марта Таня отправляется в магазин — прицениться к «Брикетто» и «Пейже». На упаковке «Брикетто» написано, что в ней содержится 2 мг витаминов и 10 мг минералов, а в пакете «Пейже» — 3 мг витаминов и 50 мг минералов. Таня дисциплинированно складывает в тележку 30 упаковок «Брикетто» и 5 пакетов «Пейже» — на месяц должно хватить.

	«Брикетто»	«Пейже»	Требование
Витамины	2	3	120
Минералы	10	50	880

Направляясь к кассе, Таня задумывается: а правильно ли она посчитала? Сначала она вычисляет, сколько витаминов она сложила

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1826

Жан Батист Эжен Фурье предвосхищает линейное программирование; Карл Фридрих Гаусс решает линейные уравнения методом исключения переменных (метод Гаусса)

1902

Дьюла (Джулиус) Фаркаш предлагает решение систем неравенств в тележку. В 30 упаковках «Брикетто» 2 × 30 = 60 мг витаминов, а в «Пейже» – 3 × 5 = 15. Итого 2 × 30 + 3 × 5 = 75 мг витаминов. Повторив те же расчеты для минералов, она получает 10 × 30 + 50 × 5 = 550 мг.

Тренер требует, чтобы Таня потребляла не менее 120 мг витаминов и не менее 880 мг минералов, а значит, ей нужно еще упаковок и пакетов. Танина задача – подобрать количества «Брикетто» и «Пейже» так, чтобы они соответствовали диетным предписаниям. Таня возвращается в отдел здорового питания и набирает еще упаковок и пакетов. Теперь в тележке 40 упаковок и 15 пакетов. Этого-то уж точно хватит? Она пересчитывает витамины и минералы и получает 2 × 40 + 3 × 15 = 125 мг и 10 × 40 + 50 × 15 = 1150 мг соответственно. Вот теперь все рекомендации тренера учтены – даже с перебором.

Допустимые решения Комбинация (40, 15) из двух видов пищевых добавок позволит Тане поддерживать установленную диету. Это так называемая возможная комбинация, или «допустимое» решение. Мы уже поняли, что (30, 5) допустимым решением не является, а значит, где-то пролегает водораздел между двумя типами комбинаций – допустимых решений, соответствующих условиям диеты, и недопустимых решений, этим условиям не соответствующих.

У Тани множество других вариантов решения задачи. Она могла бы набить тележку одним лишь «Брикетто». В этом случае ей потребовалось бы взять 88 упаковок. Вариант (88, 0) отвечает обоим условиям, поскольку витаминов в таком наборе получается 2 × 88 + 3 × 0 = 176 мг, а минералов 10 × 88 + 50 × 0 = 880 мг. Если бы Таня решила купить только «Пейже», ей бы потребовалось 40 пакетов, тоже допустимое решение (0, 40), отвечающее требованиям и по витаминам, и по минералам: 2 × 0 + 3 × 40 = 120 мг и 10 × 0 + 50 × 40 = 2000 мг. Заметим, что дозы витаминов и минералов ни в одном случае не соответствуют требованиям тренера *в точности*, однако тренер наверняка будет Таней доволен: она принимает вдосталь и того и другого.

Оптимальные решения Теперь давайте учтем деньги. Добравшись до кассы, Таня собирается оплатить покупку. Она замечает, что и упаковки, и пакеты стоят одинаково – по 5 фунтов каждый. Нам пока удалось найти три допустимых решения – (40, 15), (88, 0) и (0, 40), цены каждого – 275, 440 и 200 фунтов соответственно, поэтому наилучшее решение – не покупать «Брикетто» совсем, а взять 40 пакетов «Пейже». Получится дешевле всего, и диетные предписания будут исполнены.

Но сколько каких продуктов взять в данном случае, мы решили бессистемно. Сгоряча Таня попробовала несколько вариантов сочетания «Брикетто» и «Пейже»,

1945

Джордж Стиглер решает задачу о диете эвристическим методом

1947

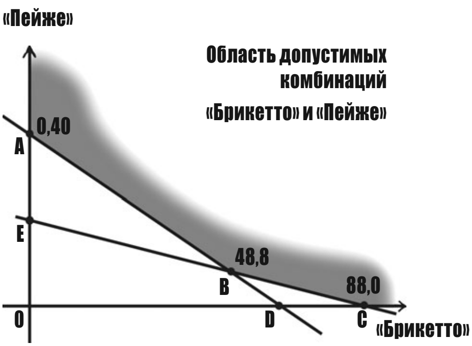
Джордж Данциг формулирует симплекс-метод и решает задачу о диете методом линейного программирования

1984

Нарендра Кармакар выводит новый алгоритм для решения задач линейного программирования но посчитала цену только тех вариантов, какие пришли ей в голову. А можно ли поточнее? Есть ли такая комбинация «Брикетто» и «Пейже», которая одновременно и удовлетворит тренера, и ударит по Таниному карману менее всего? Для этого Тане нужно отправиться домой и засесть за расчеты с карандашом и бумагой.

Задачи линейного программирования Таню всегда учили визуализировать поставленные цели. Если к победе на Олимпиаде у нее это получается применять, может, получится и к математике? Итак, она рисует область допустимых решений. Это несложно, поскольку в расчет приняты всего два продукта. Линия *AD* представляет комбинацию «Брикетто» и «Пейже», содержащих ровно 120 мг витаминов. Все комбинации выше этой линии содержат большие количества. Линия *EC* представляет комбинацию добавок, содержащую ровно 880 мг минералов. Все комбинации продуктов над обеими линиями – допустимые решения и представляют все допустимые к покупке комбинации.

Задачи, сходные с диетной, называются задачами линейного программирования. Слово «программирование» означает процедуру (именно в этом смысле употребляли этот термин до того, как он стал неразрывно связан с компьютерами), а «линейный» говорит о том, что мы работаем с прямыми линиями. Математики доказали, что для решения Таниной задачи линейным программированием необходимо лишь знать суммы Таниных чеков и обозначить их в экстремальных точках Таниных графиков. Таня обнаружила еще одно допустимое решение – точку *B* с координатами (48, 8), что означает приобретение 48 упаковок «Брикетто» и 8 пакетов «Пейже». В этом случае ей удастся *в точности* удовлетворить диетные предписания, поскольку эта комбинация содержит 120 мг витаминов и 880 мг минералов. По 5 фунтов за упаковку, и сумма чека составит 280 фунтов. Однако оптимальная покупка остается той же – никакого «Брикетто» и 40 пакетов «Пейже», на общую сумму в 200 фунтов, хотя минералов будет на 1120 мг больше необходимого.



Оптимальная комбинация в итоге зависит от относительных стоимостей продуктов. Если бы цена упаковки «Брикетто» упала до 2 фунтов, а «Пейже» подорожал до 7 фунтов, суммы чеков за экстремальные комбинации *A* (0, 40), *B* (48, 8) и *C* (88, 0) стали бы 280, 152 и 176 фунтов соответственно.

С такими ценами оптимальная покупка состояла бы из 48 упаковок «Брикетто» и 8 пакетов «Пейже» по общей цене в 152 фунта.

История В 1947 году американский математик Джордж Данциг, тогда служивший в ВВС США, сформулировал метод решения задач линейного программирования, получившего название «симплекс-метода». Метод оказался настолько удачным, что Данциг прославился на Западе как отец линейного программирования. В Советской России, отрезанной от остального мира холодной войной, теорию линейного программирования независимо от Данцига сформулировал Леонид Канторович. В 1975 году Канторович и голландский математик Тьяллинг Купманс получили Нобелевскую премию по экономике за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов, включавшую методики линейного программирования.

Тане пришлось выбирать лишь из двух продуктов — двух вариантов, — а современные задачи повсеместно решаются для тысяч вариантов. Данциг открыл свой метод во времена, когда компьютеров были единицы, но уже существовал проект «Математические таблицы» — плод десятилетнего труда, начатого в Нью-Йорке в 1938 году. Для решения задачи о диете с девятью «витаминными» предписаниями и 77 переменными потребовалось около 10 счетоводов и 12 дней расчетов.

Кроме феноменально успешного симплекс-метода и его производных были опробованы и другие. В 1984 году индийский математик Нарендра Кармакар вывел новый практически применимый алгоритм, а советско-американский ученый Леонид Хачиян предложил еще один, но в основном — теоретической значимости.

Простейшая модель линейного программирования применима к множеству разных задач помимо выбора диеты. К примеру, логистическая задача — перемещение готовой продукции с мест производства на склады. У решений этой задачи своя структура, они составляют целую отдельную область изучения. Цель исследования в данном случае — минимизировать стоимость перевозок. Цель других задач линейного программирования — максимизация (например, прибыли). В задачах третьего вида переменные могут иметь только целочисленные значения или вообще равняться лишь нулю или единице, однако такие задачи — совсем отдельная история, и для их решения необходимы особые процедуры.

Посмотрим, выиграет ли Таня Смит золотую олимпийскую медаль. Если ей это удастся, отметим еще один триумф линейного программирования.

В сухом остатке: Бережем здоровье по минимальной цене

46 Задача коммивояжера

Джеймс Кук из Бисмарка (Северная Дакота, США) — отличный торговец компании «Электра», производителя пылесосов. Полученное им звание «Торговец года» — доказательство его талантов. Джеймс торгует в Альбукерке, Чикаго, Далласе и Эль-Пасо, и каждый город он навещает по разу в месяц. Джеймс задается вопросом: как именно ему проложить маршрут, чтобы проезжать минимум миль? Такова формулировка классической задачи коммивояжера.

Джеймс составил таблицу расстояний между городами. Например, от Бисмарка до Далласа — 1020 миль, эта ячейка на пересечении столбца Бисмарка и ряда Далласа закрашена серым.

Жадный метод Джеймс Кук — человек практичный, он рисует примерную карту своей торговой территории, не заботясь о точности: главное — понимать, где какой город приблизительно расположен и какие между ними расстояния. Его обычный маршрут начинается в Бисмарке, пролегает через Чикаго, Альбукерке, Даллас и Эль-Пасо, после чего Кук возвращается в Бисмарк. В маршруте БЧАДЭБ — 4113 миль, а это выходит довольно накладно. Можно ли как-то удешевить перемещения?

Альбукерке				
883	Бисмарк			
1138	706	Чикаго		
580	1020	785	Даллас	
236	1100	1256	589	Эль-Пасо

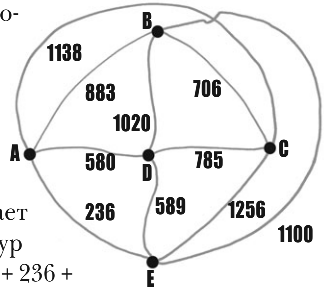
Прикидывание плана территории продаж никак не скрывает того факта, что Джеймсу подробности ни к чему — ему продавать надо. Глянув на карту в своей бисмаркской конторе, Джеймс понимает, что ближайший город — Чикаго. До него 706 миль, тогда как до Альбукерке — 883, до Далласа — 1020, а до Эль-Пасо — 1100.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 1810
Чарлз Бэббидж отмечает эту задачу как занимательную

1831
Задача коммивояжера приобретает практический смысл

1926
Отакар Борувка выводит «жадный алгоритм»



Он немедля выезжает в Чикаго, наплевав на дальнейшее планирование. Добравшись до Чикаго и поторговав в этом городе, Джеймс выбирает следующий ближайший пункт назначения — Даллас, поскольку до него 785 миль, а до Альбукерке или Эль-Пасо — дальше.

Приехав в Даллас, он понимает, что уже отмахал 706 + 785 миль. Теперь надо выбрать, ехать в Альбукерке или в Эль-Пасо. Выбирает Альбукерке — до него ближе. Оттуда он отправится в Эль-Пасо, тур окончен, дальше — домой. Итого Джеймс проехал 706 + 785 + 580 + 236 + + 1100 = 3407 миль. Этот маршрут — БЧДАЭБ — гораздо короче предыдущего, и Джеймс к тому же позаботился таким способом об экологии, уменьшив выхлоп.

Такой подход к решению этой задачи называют жадным алгоритмом поиска кратчайшего маршрута. Это название обусловлено тем, что решения Джеймса Кука всегда локальны, т. е. Кук прибывает в город и подбирает кратчайший маршрут до следующей точки. Таким способом он даже не пытается заглянуть на один шаг дальше. Это не стратегический подход, он никак не учитывает общий наилучший маршрут. Оказавшись в конце концов в Эль-Пасо, Кук вынужден возвращаться в Бисмарк долгим путем. Да, маршрут покороче найти удалось, но кратчайший ли он? Джеймсу стало интересно.

Джеймс понимает, какую выгоду можно извлечь из факта, что городов всего пять. Когда их так немного, можно составить список всех возможных маршрутов и выбрать самый короткий. Между пятью городами можно проложить всего 24 маршрута — или даже 12, если считать дорогу в город и из него одним и тем же этапом маршрута. Такое допущение приемлемо, поскольку расстояние получается одно и то же. Этот метод принес Джеймсу Куку пользу: он выяснил, что оптимальный маршрут — БАЭДЧБ (или наоборот — БЧДЭАБ): он всего 3199 миль.

Вернувшись в Бисмарк, Джеймс осознает, что разъезды его все равно слишком долги. Дело даже не в расстоянии, а во времени. Он составляет новую таблицу, в которую вносит время в пути между городами на его торговой территории.

Альбукерке				
12 (по земле)	Бисмарк			
6 (самолетом)	2 (самолетом)	Чикаго		
2 (самолетом)	4 (самолетом)	3 (самолетом)	Даллас	
4 (по земле)	3 (самолетом)	5 (самолетом)	1 (самолетом)	Эль-Пасо

1954

Джордж Данциг и Эдсгер Дейкстра предлагают подходы к задаче коммивояжера

1971

Стивен Кук формулирует концепцию алгоритмов, основанную на сопоставлении классов задач *P* и *NP*

2004

Дэвид Эпплгейт решает задачу для всех 24 978 городов в Швеции

Когда речь шла о расстояниях, Джеймс понимал, что сумма всех расстояний вдоль двух сторон треугольника всегда больше длины третьей стороны; в этом случае получается граф Евклида, а нам про решение этой задачи много чего известно.

Однако теперь задача сформулирована иначе — про время. Лететь вдоль основных маршрутов часто выходит быстрее, чем вдоль побочных, и Джеймс Кук замечает, что перелет из Эль-Пасо в Чикаго быстрее, если перемещаться через Даллас. Так называемое неравенство треугольника здесь не действует.

Жадный алгоритм, примененный к задаче о времени, приводит к 22-часовому маршруту БЧДЭАБ, тогда как два оптимальных маршрута — БЧАДЭБ и БЧДАЭБ — всего по 14 часов, первый — 4113 миль, второй — 3407. Джеймс Кук остается страшно доволен выбором маршрута БЧДАЭБ — сплошная экономия. В следующий раз он рассмотрит стоимости маршрутов и выберет самый дешевый.

От секунд до столетий Задача коммивояжера значительно усложняется, если городов много. Джеймс Кук — замечательный сотрудник, и его вскоре повышают в должности. Теперь ему предстоит навещать 13 городов, а не 4, как раньше. Жадный метод себя не оправдал, и Кук желает рассмотреть весь перечень возможных маршрутов. Он садится составлять этот список. Выясняется, что таких маршрутов $3{,}1 \times 10^9$, т. е. если бы компьютер выдавал по одному маршруту в секунду, ему бы потребовалось примерно сто лет, чтобы составить полный список. Задача для 100 городов заняла бы компьютер на тысячелетия.

Для решения задачи коммивояжера применяются разные хитрые методы. Разработаны и такие, что могут управиться аж с 5000 городов, а один даже смог решить эту задачу для 33 810 городов, хотя мощность компьютера, потребная для такого решения, колоссальна. Неточные методы выдают маршруты, близкие к оптимальным, и обозначают возможную погрешность. Такие методы позволяют решать задачи коммивояжера для миллионов городов.

Вычислительная сложность Взглянем на задачу с компьютерной точки зрения и попытаемся оценить, сколько времени займет нахождение решения. Простое перечисление всех возможных маршрутов — худший вариант. Джеймс обнаружил, что нахрапом задачка о 13 городах будет решена за сто лет. А если добавить в список еще два города, нахождение решения займет 20 000 лет!

Ясное дело, такие оценки зависят от того, какой компьютер мы используем, но для n городов время поиска решения возрастает более-менее n-факториально (факториал — число, получаемое умножением всех целых чисел от 1 до n). Для 13 городов, как мы уже выяснили, число вариантов равно $3{,}1 \times 10^9$. Выбор, какой из маршрутов — кратчайший, становится задачей *факториального* времени, а это довольно долго.

Имеются и другие методы решения этой задачи: при их применении для *n* городов время увеличивается в соответствии с формулой 2^n (2, умноженное на себя само *n* раз); в этом случае для 13 городов окажется примерно 8192 решения (в 8 раз больше, чем для 10 городов). Метод такой сложности называется алгоритмом *экспоненциального* времени*. Святой Грааль таких «задач комбинаторной оптимизации» — алгоритм, зависящий не от *n*-ной степени 2, а от фиксированной степени *n*. Чем меньше степень, тем лучше; например, если алгоритм основан на n^2, то для 13 городов будет всего 169 решений — в два с небольшим раза больше, чем для 10 городов. Метод такой «сложности» применим в полиномиальном времени** — этим методом задачи решаются «быстро», всего минуты за три, а не за века.

* Алгоритм, при котором время решения задачи растет экспоненциально, тогда как сложность задачи — линейно.

** При этом алгоритме время решения задачи — функция, зависящая от основания, а не степени, а потому этот алгоритм быстрее.

Класс задач, *решаемых* компьютерно в полиномиальном времени, обозначается *P*. Нам неизвестно, относится ли к этому классу задача коммивояжера. Никто пока не предложил полиномиальный алгоритм для этой задачи, однако никто и не доказал, что он не реализуем.

Более широкий класс, обозначаемый *NP*, состоит из задач, решение которых можно *проверить* за полиномиальное время. Задача коммивояжера — однозначно из этой категории, поскольку проверить, короче ли *данный* маршрут любого заданного расстояния, можно за полиномиальное время. Нужно лишь добавить расстояния на данном маршруте и сравнить их с заданным. *Найти* и *проверить* — две разные операции: проверить, действительно ли 167 × 241 = 40 247, — просто, а вот найти делители 40 247 — совсем другой вопрос.

Любая ли задача, проверяемая за полиномиальное время, может быть решена за полиномиальное время? Если бы так и было, классы *P* и *NP* оказались бы идентичны друг другу, т. е. $P = NP$. Верно ли равенство $P = NP$ — мучительный вопрос современных компьютерщиков. Бо́льшая их часть считает, что равенство неверно: эти ученые полагают, что есть задачи, которые можно проверить за полиномиальное время, а решить нельзя. Задача эта настолько грандиозна, что Математический институт Клея предложил премию в 1 000 000 долларов тому, кто докажет, что $P = NP$ или $P \neq NP$.

В сухом остатке: Найдем наилучший маршрут

47 Теория игр

Кое-кто считает, что Джонни был умнейшим человеком среди своих современников. Джон фон Нейман — вундеркинд, ставший легендой математического мира. Заслышав, что Нейман по дороге на встречу набросал в такси теорему о минимаксе из теории игр, люди только понимающе кивали. Нейман всегда вытворял что-нибудь в этом роде. Он внес свой вклад в квантовую механику, логику, алгебру — почему бы и не теория игр? И действительно — теория игр не ускользнула из поля его внимания, и вместе с Оскаром Моргенштерном они написали знаменитую книгу «Теория игр и экономическое поведение». В широчайшем смысле слова теория игр — предмет древний, однако фон Нейман довел теорию «игры двоих с нулевой суммой» до совершенства.

Игра двоих с нулевой суммой Она лишь с виду кажется сложной, а на самом деле игра двоих с нулевой суммой — это просто игра, в которой участвуют два человека, две компании или две команды и одна сторона выигрывает то, что другая проигрывает. Если *A* выигрывает 200 фунтов, это означает, что *B* проиграла 200 фунтов; в этом и состоит смысл «нулевой суммы». У *A* нет никакой заинтересованности сотрудничать с *B* — чистое соревнование, в котором есть лишь победители и проигравшие. В терминах «выиграть-выиграть» *A* выигрывает 200 фунтов, а *B* — минус 200 фунтов, сумма выигрыша при этом равна 200 + (– 200) = 0. Отсюда и происходит «нулевая сумма».

Представим, что две телекомпании АТВ и БТВ подают заявку на дополнительный новостной канал либо в Шотландии, либо в Англии. Каждая компания может получить канал лишь в одной стране, и решение они собираются принимать на основании показателей

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1713

Генри Уолдегрейв предлагает первое математическое решение задачи двух игроков

1944

Фон Нейман и Моргенштерн публикуют «Теорию игр и экономического поведения» предполагаемого увеличения аудитории. Медиаанализ дал оценочные значения возможного роста аудиторий, и обе компании получили доступ к этим сведениям, представленным для удобства в виде таблиц и приведенным в миллионах зрителей.

		БТВ	
		Шотландия	Англия
АТВ	Шотландия	+ 5	– 3
	Англия	+ 2	+ 4

Если и АТВ, и БТВ решат работать в Шотландии, АТВ выиграет 5 миллионов зрителей, а БТВ потеряет столько же. Смысл знака «минус», как в случае с – 3, в том, что АТВ потеряет аудиторию в 3 миллиона. Отдача с «+» хороша для АТВ, а с «–» – для БТВ.

Допустим, компании примут единократное решение на основании представленных данных роста и подадут свои заявки одновременно, в закрытом виде. Очевидно, обе компании действуют исключительно в собственных интересах.

Если АТВ выберет Шотландию, худшее, что может произойти, – это потеря 3 миллионов зрителей. Если же она выберет Англию, то худший результат из возможных – выигрыш 2 миллионов. Очевидной стратегией для АТВ будет выбор Англии (ряд 2). Худший исход в этом случае – выигрыш 2 миллионов аудитории, независимо от выбора БТВ. С численной точки зрения АТВ выбирает между – 3 и 2 (минимумы в каждом ряду) возможный максимум.

БТВ – в более уязвимом положении, но и у нее есть возможность выработать стратегию, минимизирующую потенциальные потери и дающую надежду на лучшие результаты роста аудитории в следующем году. Если БТВ выберет Шотландию (столбец 1), худший результат из возможных – потеря 5 миллионов зрителей; выберет Англию – потеря 4 миллионов зрителей. Безопаснее всего для БТВ выбрать Англию (столбец 2), потому что

Игры разума

Джон Ф. Нэш (р. 1928), чья бурная жизнь запечатлена в фильме 2001 года «Прекрасный разум»*, получил в 1994 году Нобелевскую премию по экономике за вклад в теорию игр. Нэш и другие ученые расширили теорию игр на случаи большего числа игроков и на игры, в которых возможно сотрудничество между противниками, включая сговор двоих против третьего игрока. «Равновесие Нэша» (седловая точка равновесия) позволило взглянуть на теорию игр гораздо шире, чем когда-то предложил фон Нейман, а это привело к более глубокому пониманию экономических ситуаций.

* *«A Beautiful Mind»*, биографическая драма режиссера Рона Хауарда, в российском прокате — «Игры разума».

1950
Алберт Уильям Такер формулирует дилемму заключенного, а Нэш предлагает равновесие, названное его именем

1982
Мэйнерд Смит публикует «Эволюцию и теорию игр»

1994
Джону Ф. Нэшу присуждают Нобелевскую премию по экономике за вклад в теорию игр

лучше потерять 4 миллиона, а не 5. Хуже потери 4 миллионов у БТВ результата быть не может, что бы ни решила АТВ.

Таковы наиболее безопасные стратегии для обоих игроков, и в этом случае АТВ выиграет 4 миллиона дополнительных зрителей, а БТВ их потеряет.

Когда игра определена? В следующем году те же телекомпании получают дополнительный вариант на выбор — Уэльс. Поскольку обстоятельства изменились, изменилась и таблица потенциальных выигрышей:

		БТВ			
		Уэльс	Шотландия	Англия	минимум в ряду
АТВ	Уэльс	+ 3	+ 2	+ 1	+ 1
	Шотландия	+ 4	– 1	0	– 1
	Англия	– 3	+ 5	– 2	– 3
максимум в столбце		+ 4	+ 5	+ 1	

Как и прежде, безопасной стратегией для АТВ будет выбрать ряд, максимизирующий худший сценарий. Максимум из {+ 1, – 1, – 3} — Уэльс (ряд 1). Безопаснее всего для БТВ — выбрать столбец с минимальным эффектом из {+ 4, + 5, + 1}, а это — Англия (столбец 3).

Выбрав Уэльс, АТВ *гарантированно* выиграет не менее 1 миллиона зрителей, что бы ни решила БТВ, а выбирая Англию (столбец 3), БТВ *гарантированно* проиграет не больше 1 миллиона зрителей, что бы ни решила АТВ. Такие варианты решений, следовательно, являются наилучшими стратегиями для каждой из компаний, и в этом смысле игра предопределена (хотя по-прежнему несправедлива в отношении БТВ). В этой игре

максимум из {+ 1, – 1, – 3} = минимум из {+ 4, + 5, + 1},

по обеим сторонам этого уравнения есть лишь одно одинаковое значение, + 1. В отличие от предыдущей игры, в этой есть «седловая точка» равновесия, равная +1.

Повторяющиеся игры Пример бессмертной повторяющейся игры — «камень, ножницы, бумага». В игре с телекомпаниями выигрыш случался единожды, а в «камень, ножницы, бумагу» обычно играют полдесятка раз или даже несколько сот раз — во время ежегодного Чемпионата мира.

	бумага	ножницы	камень	минимум в ряду
Бумага	ничья = 0	проигрыш = – 1	выигрыш = + 1	– 1
Ножницы	выигрыш = + 1	ничья = 0	проигрыш = – 1	– 1
Камень	проигрыш = – 1	выигрыш = + 1	ничья = 0	– 1
максимум в столбце	+ 1	+ 1	+ 1	

В этой забаве два игрока показывают ладонь, два пальца или кулак, что символизирует бумагу, ножницы или камень соответственно. Игроки показывают жесты одновременно, на счет «три»: бумага с бумагой – ничья, бумага проигрывает ножницам (поскольку ножницы режут бумагу), но побеждает камень (его можно завернуть в бумагу).

Если показать «бумагу», возможные выигрыши таковы: 0, – 1, + 1, т. е. верхний ряд нашей таблицы выигрышей. Седловой точки в этой игре нет и нет очевидной *чистой* стратегии. Если игрок постоянно выбирает один и тот же жест – допустим, бумагу, – его противник вычислит этот прием и попросту начнет все время показывать ножницы и далее всегда будет в выигрыше. Согласно минимакс-теореме фон Неймана, тут пригодится «смешанная стратегия» или выбор разных жестов на основании вероятностей.

По законам математики игрокам лучше всего выбирать жест случайно, однако в среднем каждый жест должен быть выбран в трети всех раундов. «Слепая» случайность, однако, может оказаться не наилучшей стратегией: чемпионы мира умеют выбирать стратегию с некоторым «психологическим» вывертом. Эти умельцы знают, как перехитрить соперника.

А какая игра – с *не*нулевой суммой? Не всякая игра – с нулевой суммой; бывают и такие, где у каждого игрока своя отдельная таблица выигрышей. Знаменитый пример – «дилемма заключенного», сформулированная А. У. Такером.

Алана и **Б**ерти забирают в полицию по подозрению в грабеже и держат в отдельных камерах, чтобы узники не переговаривались. Выигрыш в данном случае – срок заключения, но он зависит не только от их личных ответов на допросе, но и от того, каковы будут их ответы, *вместе взятые*. Если **А** во всем признается, а **Б** – нет, то **А** получит всего год тюрьмы (см. таблицу выигрышей **А**), а **Б** посадят на целых десять лет (см. таблицу выигрышей **Б**). Если **А** не сознается, сроки будут распределены в обратном порядке. Если сознаются оба – получат по четыре года каждый, а если оба не сознаются, обоих спустят с крючка!

А		**Б**	
		признается	не признается
А	признается	+ 4	+ 1
	не признается	+ 10	0

Б		**А**	
		признается	не признается
Б	признается	+ 4	+ 10
	не признается	+ 1	0

Если бы заключенные могли договориться, они бы выбрали оптимальную стратегию и не стали бы ни в чем признаваться – исход «выиграть-выиграть».

В сухом остатке:
Математика общего выигрыша

48 Относительность

Скорость движущегося объекта измеряема относительно других объектов. Если мы едем по трассе со скоростью 70 миль в час (миль/ч), а рядом с нами — другой автомобиль, едущий со скоростью 70 миль/ч в том же направлении, наша скорость относительно этого автомобиля равна нулю. Тем не менее обе машины едут со скоростью 70 миль/ч — относительно земли. Скорость нашего автомобиля относительно машины, едущей по встречной полосе со скоростью 70 миль/ч, — 140 миль/ч. Теория относительности внесла свои коррективы в эти рассуждения.

Теория относительности началась с голландского физика Хендрика Лоренца в конце XIX века, но серьезный рывок произвел Альберт Эйнштейн в 1905 году. Знаменитый труд Эйнштейна о специальной теории относительности совершил переворот в изучении движения объектов, низведя Ньютонову классическую теорию, великое открытие своего времени, до частного случая.

От Галилео Чтобы описать теорию относительности, воспользуемся подсказкой самого мастера: Эйнштейн обожал поговорить о поездах и мысленных экспериментах. В нашем примере Джим Даймонд находится в поезде, движущемся со скоростью 60 миль/ч. Джим отправляется из своего хвостового вагона в вагон-ресторан — со скоростью 2 мили/ч. Относительно земли его скорость равна 62 милям/ч. На пути из вагона-ресторана скорость Джима относительно земли — 58 миль/ч, поскольку перемещается он против движения поезда. Все это нам сообщает теория Ньютона. Скорость — понятие относительное, и направление движения Джима определяет, прибавляем мы его скорость к скорости поезда или вычитаем из нее.

Поскольку любое движение относительно, нам всегда приходится выбирать «систему отсчета» — точку, из которой происходит измерение

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 1632
Галилей предлагает преобразования для падающих тел, названные его именем

1676
Оле Рёмер рассчитывает скорость света из наблюдений за лунами Юпитера

1687
«Принципы» Ньютона описывают классические законы движения

скорости. В одномерном движении поезда вдоль прямой по рельсам можно мыслить в терминах фиксированной системы отсчета с началом на железнодорожной станции на расстоянии x и с временем t в качестве этой самой системы отсчета. За нулевую точку принимаем точку на платформе, а время отсчитываем по станционным часам. Координаты расстояния/времени относительно этой системы координат — (x, t).

Есть и другая система отсчета — относительно самого поезда. Если измерить расстояние от хвоста поезда и время по наручным часам Джима, координаты будут другие — $(\bar{x}, \bar{t})$. Две эти системы можно и синхронизировать. Когда поезд проезжает мимо отметки на платформе, $x = 0$ и $t = 0$. Если Джим примет эту точку за $\bar{x} = 0$ и на своих часах назначит $\bar{t} = 0$, между этими двумя системами координат возникнет связь.

Поезд проезжает мимо станции, и в тот же момент Джим отправляется в вагон-ресторан. Можно посчитать, как далеко уйдет Джим от станции за пять минут. Мы знаем, что поезд движется со скоростью 1 миля/мин, следовательно, за 5 мин он проедет 5 миль, а Джим при этом пройдет $\bar{x} = {}^{10}/_{60}$ мили (исходя из его скорости в 2 мили/ч, умноженной на время ${}^{5}/_{60}$). Итого Джим окажется на расстоянии $5^{10}/_{60}$ от станции. Следовательно, отношение между x и $\bar{x}$ задается уравнением $x = \bar{x} + v \times t$ (где $v = 60$). Извлечем из этого уравнения расстояние, пройденное Джимом относительно системы отсчета, связанной с поездом:

$$\bar{x} = x - v \times t.$$

Время в классической Ньютоновой теории представляется одномерным потоком из прошлого в будущее. Оно едино для всех и не зависит от пространства. Поскольку это абсолютное количество, время Джима в поезде то же, что и у станционного смотрителя на платформе, а значит,

$$\bar{t} = t.$$

Эти две формулы — для $\bar{x}$ и $\bar{t}$ — были впервые выведены Галилео Галилеем, а полученные равенства называются преобразованиями — они преобразуют одну систему отсчета в другую. Согласно Ньютоновой классической теории, скорость света должна подчиняться этим двум преобразованиям Галилея для $\bar{x}$ и $\bar{t}$.

К XVII веку люди уже сознавали, что у света есть скорость, а ее приблизительное значение было получено в 1676 году датским астрономом Оле Рёмером. Альберт Майкельсон в 1881 году измерил скорость света поточнее и выяснил, что она равна 186 300 милям в секунду. Кроме того, он обнаружил, что свет распространяется совсем не так, как звук. Майкельсон также понял, что, в отличие от скорости наблюдателя в движущемся поезде, направление движения луча света никак не влияет на его скорость. Этот поразительный результат надо было как-то объяснить.

1881

Альберт Майкельсон измеряет скорость света с высокой точностью

1887

Впервые записаны преобразования Лоренца

1905

Эйнштейн публикует «К электродинамике движущихся тел» — работу, описывающую специальную теорию относительности

1915

Эйнштейн описывает общую теорию относительности — публикует «Уравнения поля в теории тяготения»

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Лоренц-фактор

Специальная теория относительности Хендрик А. Лоренц составил математические уравнения, описывающие связь между расстоянием и временем в системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью v относительно другой системы отсчета. Эти преобразования очень похожи на те, что мы уже рассмотрели, но в них фигурирует особый «Лоренц-фактор», зависящий от скорости v и скорости света, c.

А тут — Эйнштейн Эйнштейн превратил открытия Майкельсона относительно скорости света в постулат:

Скорость света всегда имеет одно и то же значение для всех наблюдателей и не зависит от направления движения света.

Если бы Джим Даймонд включал и выключал фонарик, проезжая мимо станции, по направлению движения поезда, скорость света по его измерениям равнялась бы c. Эйнштейнов постулат утверждает, что наблюдающий с платформы станционный смотритель получил бы то же значение скорости света – c, а не $c + 60$ миль/ч. Эйнштейн предложил также и второй постулат:

Одна система отсчета движется относительно другой с постоянной скоростью.

Гениальность работы Эйнштейна 1905 года обусловлена до некоторой степени его стремлением к математическому изяществу. Звуковые волны в среде распространяются колебаниями молекул этой среды. Физики полагали, что свету для распространения тоже необходима какая-нибудь среда. Никто не знал, что это за среда, но ей все же дали название — «светоносный эфир».

Эйнштейн не считал необходимым допускать существование такого эфира как среды для распространения света. Напротив, он вывел преобразования Лоренца из двух простых принципов относительности — тут вся теория и возникла. Эйнштейн отдельно доказал, что энергия частицы E определяется уравнением $E = \alpha \times mc^2$. Для энергии покоя (когда $v = 0$, а значит, $\alpha = 1$) получим легендарное уравнение связи энергии и массы:

$$E = mc^2.$$

И Лоренц, и Эйнштейн были выдвинуты на Нобелевскую премию в 1912 году. Лоренц ее уже получал в 1902-м, а Эйнштейну пришлось подождать до 1921 года — ему дали премию за исследование фотоэлектрического эффекта (эти материалы он опубликовал тогда же, в 1905-м). Тот год швейцарскому патентному служащему явно удался.

Эйнштейн против Ньютона Наблюдения за медленно едущими поездами показывают крошечную разницу между теорией относительности Эйнштейна и классической теорией Ньютона. В таких условиях относительная скорость v настолько мала по сравнению со скоростью света, что лоренц-фактор α практически равен 1. В этом случае уравнения Лоренца можно считать идентичными Галилеевым преобразованиям. Итак, в области малых скоростей Эйнштейн и Ньютон согласились бы друг с другом. Для наглядности различий этих двух теорий скорости и расстояния должны быть громадными. Даже суперскоростные французские «Тэ-же-ве» таких скоростей пока не достигли, и нескоро еще наступит такое время, когда развитие железнодорожного сообщения вынудит нас отказаться от теории Ньютона в пользу Эйнштейновой. Однако в космос мы, как ни крути, отправимся с Эйнштейном.

Общая теория относительности Эйнштейн обнародовал общую теорию относительности в 1915 году. Эта теория применима к системам отсчета, двигающимся *с ускорением* относительно друг друга, и связывает воздействия ускорения и гравитации.

Применяя общую теорию относительности, Эйнштейн смог предсказать явления искривления световых лучей гравитационными полями крупных объектов вроде Солнца. Его теория объясняет движение оси вращения Меркурия. Эта прецессия не может быть полностью объяснена с позиций Ньютоновой теории всемирного тяготения и силами, воздействующими на Меркурий со стороны других планет. Эта загадка допекала астрономов с сороковых годов XIX века.

Подходящая система отсчета для общей теории относительности — четырехмерная, пространственно-временная. Евклидово пространство плоское (у него нулевая кривизна), а эйнштейнова четырехмерная пространственно-временная геометрия (или риманова геометрия) — искривленная. Ньютонова сила тяготения более не объясняет притяжение между объектами. Общая теория относительности Эйнштейна объясняет это притяжение именно искривлением пространства-времени. В 1915 году Эйнштейн произвел очередную научную революцию.

В сухом остатке: Скорость света — абсолютна

49 Великая теорема Ферма

Можно сложить два числа во вторых степенях и получить третье — тоже в квадрате. Например, $5^2 + 12^2 = 13^2$. А можно ли сложить два числа в третьих степенях и получить третье в кубе? А если взять еще более высокие степени? Что примечательно, ничего у нас не выйдет. Последняя теорема Ферма утверждает, что для любых четырех целых чисел x, y, z и n не существует решения уравнения $x^n + y^n = z^n$, если n больше 2. Ферма заявил, что нашел «чудесное доказательство», и тем самым мучил целые поколения потомков-математиков, включая 10-летнего мальчика, прочитавшего про этот поиск математического клада в местной библиотеке.

Великая (Последняя) теорема Ферма — о диофантовом уравнении, а уравнения эти — самые зубодробительные: они требуют, чтобы решения были целыми числами. Их назвали в честь Диофанта Александрийского, чья «Арифметика» стала краеугольным камнем теории чисел. Пьер Ферма был юристом и советником парламента в Тулузе. Разносторонне одаренный математик, он заслужил репутацию в области теории чисел, но более всего памятен формулировкой своей последней теоремы — прощального подарка математике. Ферма доказал ее — или думал, что доказал, — и написал на полях своего экземпляра Диофантовой «Арифметики»: «Я нашел поистине чудесное доказательство, но тут поля слишком узкие, оно не поместится».

Ферма решил множество потрясающих задач, но, похоже, его последняя теорема — не из их числа. Эта теорема занимала умы легионов математиков три столетия, но доказана была лишь недавно.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

Около 1665
Пьер Ферма умирает, не оставив записи «чудесного доказательства»

1753
Леонард Эйлер доказывает теорему для $n = 3$

1825
Адриен-Мари Лежандр и Иоганн Петер Густав Лежен Дирихле независимо друг от друга доказывают теорему для $n = 5$

1839
Габриэль Ламе доказывает теорему для $n = 7$

Полученное доказательство не уместилось бы ни на каких полях, а современные методы, потребовавшиеся для его составления, всерьез ставят заявление Ферма под сомнение.

Уравнение $x + y = z$ Как решить такое уравнение с тремя неизвестными x, y и z? В уравнениях обычно одна неизвестная — x, а тут их целых три. На самом же деле этот факт делает уравнение $x + y = z$ довольно простым для решения. Можно выбрать любые значения x и y, какие пожелаем, сложить их и получить z, а все три значения и будут решением этого уравнения. И вся недолга.

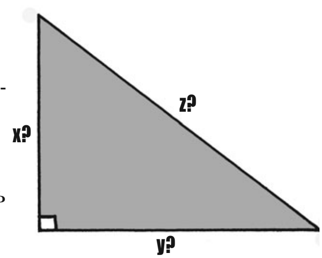
Если, например, выбрать $x = 3$, а $y = 7$, значения $x = 3$, $y = 7$, а $z = 10$ будут решением этого уравнения. Также очевидно, что некоторые значения x, y и z решениями этого уравнения быть не могут. Например, $x = 3$, $y = 7$, а $z = 9$ — не решения, поскольку эти значения нарушают равенство правой и левой сторон выражения.

Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ Теперь рассмотрим квадраты. Квадрат числа есть число, умноженное на само себя, и записываем мы это число так: x^2. Если $x = 3$, то $x^2 = 3 \times 3 = 9$. Уравнение, которое мы решаем, не $x + y = z$, а

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Можно ли решить его, как предыдущее, выбрав значения для x и y и таким способом получив z? При значениях $x = 3$, а $y = 7$, например, в левой стороне уравнения получим $3^2 + 7^2$, т. е. $9 + 49 = 58$. Поскольку z должно быть квадратным корнем из 58 ($z = \sqrt{58}$), значит, $z = 7{,}6158$ (приблизительно). Мы, разумеется, имеем право заявить, что $x = 3$, $y = 7$ и $z = \sqrt{58}$ есть решение уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, но, увы, диофантовы уравнения предпочитают целочисленные решения. Поскольку $\sqrt{58}$ — не целое число, решение $x =3$, $y = 7$ и $z = \sqrt{58}$ не годится.

Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ связано с треугольниками. Если x, y и z представляют длины сторон прямоугольного треугольника, значения этих длин будут решениями нашего уравнения. Верно и обратное: если x, y и z являются решением этого уравнения, угол между x и y — прямой. Благодаря связи с теоремой Пифагора значения x, y и z, являющиеся решением этого уравнения, называются пифагоровыми тройками.



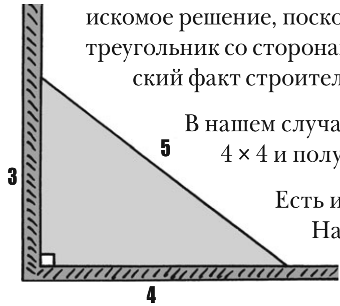
Как же нам найти эти пифагоровы тройки? Тут-то нам на помощь и придет умелец-строитель. У любого строителя найдется вездесущий треугольник 3–4–5. Значения $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ —

1843 Эрнст Эдуард Куммер утверждает, что доказал теорему в общем виде, однако Дирихле находит ошибку в аргументации

1907 Фердинанд фон Линдеманн заявляет, что вывел доказательство, но и оно оказывается ошибочным

1908 Пауль Фридрих Вольфскель учреждает премию за доказательство, если таковое будет найдено в течение 100 лет

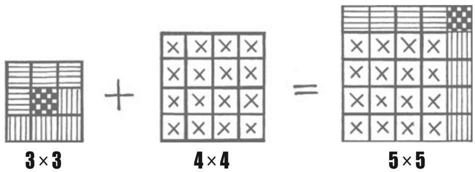
1994 Эндрю Уайлс (Уайлз) наконец доказывает теорему



искомое решение, поскольку $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 5^2$. Из обратного утверждения следует, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 обязательно содержит прямой угол. Этот математический факт строители применяют при воздвижении стен под прямыми углами к полу.

В нашем случае мы можем разбить квадрат 3×3, обернуть его вокруг квадрата 4×4 и получить квадрат 5×5.

Есть и другие целочисленные решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$. Например, $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$ — потому что $5^2 + 12^2 = 13^2$; на самом деле таких решений множество. Строительное решение $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ — на особом положении, потому что эти значения переменных — наименьшие из возможных, а также потому, что только в этом решении все три значения — последовательные целые числа. Есть немало решений, в которых значения двух переменных последовательны, например, $x = 20$, $y = 21$, $z = 29$ или $x = 9$, $y = 40$, $z = 41$, но нет такого второго, в котором последовательны все три.



То густо, то пусто Вроде бы совсем небольшой шаг — от $x^2 + y^2 = z^2$ к $x^3 + y^3 = z^3$. Следуя тому же принципу — разборке одного квадрата и оборачивания его вокруг другого, — сможем ли мы повторить тот же фокус с кубом: пересобрать один куб вокруг другого и получить третий? Как выясняется, нет, не сможем. У уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ существует бесчисленное множество разных решений, но Ферма не смог обнаружить ни одного целочисленного примера решения $x^3 + y^3 = z^3$. Дальше — хуже: Леонард Эйлер тоже не смог найти ни одного подходящего решения и выдал такую формулировку последней теоремы:

Для уравнения $x^n + y^n = z^n$ при любых значениях n, больших 2, не существует целочисленных решений.

К решению задачи доказательства можно подойти, начав с малых значений n и двигаясь по нарастающей. Так Ферма когда-то и сделал. Для $n = 4$ дело обстоит несколько проще, чем для $n = 3$, и, вполне возможно, Ферма для этого случая теорему все-таки доказал. В XVIII и XIX веках Эйлер разобрался с $n = 3$, Адриен-Мари Лежандр — с $n = 5$, а Габриэль Ламе — с $n = 7$. Ламе поначалу даже показалось, что ему удалось доказать теорему в общем виде, однако, увы, он заблуждался.

Эрнст Куммер сделал для этого доказательства очень многое — в 1843 году он представил рукопись, в которой утверждался успех доказательства для теоремы вообще, но Дирихле указал на огрехи в доказательстве. Французская академия наук предложила премию в 3000 франков за полноценное доказательство, и она в конце концов досталась Куммеру — за достойную попытку.

Куммер доказал теорему для всех простых чисел меньше 100 (а также для других значений), но не для иррегулярных простых чисел 37, 59 и 67. Например, ему не удалось доказать, что для уравнения $x^{67} + y^{67} = z^{67}$ не существует целочисленных решений. Благодаря его неудачной попытке доказать теорему в общем случае возникли ценные методики абстрактной алгебры. Вероятно, этот вклад в математику едва ли не ценнее, чем решение изначально поставленной задачи.

Фердинанд фон Линдеманн, доказавший невозможность квадратуры круга (см. стр. 22), в 1907 году заявил, что доказал теорему, но и на этот раз заявление оказалось опрометчивым. В 1908 году математик Пауль Вольфскель завещал 100 000 марок за первое полноценное доказательство — приз со сроком годности в 100 лет. Шли годы, на суд математиков было представлено около 5000 доказательств, все они подверглись проверке и были возвращены соискателям как ошибочные.

Доказательство Связь с теоремой Пифагора применима лишь для $n = 2$, но все же именно связь с геометрией оказалась ключом к подлинному доказательству — ее обнаружили в теории кривых, а гипотезу выдвинули два японских математика Ютака Танияма и Горо Симура. В 1993 году Эндрю Уайлс прочитал в Кембридже лекцию по этой теории и предъявил свое доказательство теоремы Ферма. К несчастью, и на сей раз доказательство оказалось ложным.

Французский математик с похожим именем Андре Вейль отказался засчитывать такие попытки. Он приравнял попытки доказательства этой теоремы к восхождению на Эверест и добавил, что, если человек не дошел до вершины 100 ярдов, его нельзя считать покорителем Эвереста. Обстановка накалялась. Уайлс отгородился от мира и зарылся в решение с головой. Многие уже решили, что Уайлс так и останется среди тех, кто попытался, но не осилил.

Тем не менее при содействии коллег Уайлс смог обнаружить ошибочное рассуждение и заменить его верным. На этот раз убедить экспертов удалось — теорема была доказана, а доказательство — опубликовано в 1995 году. Уайлс получил премию Вольфскеля, успев вписаться в обозначенный срок, и стал математической «звездой». Десятилетний мальчик, прочитавший о теореме Ферма в кембриджской публичной библиотеке, прошел долгий путь — и победил.

В сухом остатке: Примечательное примечание на полях

50 Гипотеза Римана

Гипотеза Римана — чуть ли самая неприступная задача чистой математики. Гипотезу Пуанкаре и великую теорему Ферма ученые одолели, а вот гипотеза Римана им не поддалась. Когда наконец удастся ее расколоть — хоть как-нибудь, — наконец решатся непостижимые вопросы о распределении простых чисел, зато возникнет целый ряд новых, и математикам по-прежнему будет над чем ломать голову.

Эта история начинается со сложения дробей — примерно такого:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Ответ — $1^5/_6$ (примерно 1,83). А что получится, если сложить больше дробей по увеличению знаменателя — скажем, до 10?

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}.$$

Количество членов ряда	Итого (приблизительно)
1	1
10	2,9
100	5,2
1000	7,5
10 000	9,8
100 000	12,1
1 000 000	14,4
1 000 000 000	21,3

Тут тоже можно обойтись обычным калькулятором — сумма в десятичном виде окажется примерно равной 2,9. Таблица слева показывает рост этой суммы с увеличением количества слагаемых.

Ряд чисел

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

называется гармоническим — это название восходит к пифагорейцам, считавшим, что струна музыкального инструмента, разделенная надвое, натрое,

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ

1854

Георг Ф. Б. Риман берется за работу над дзета-функцией

1859

Риман доказывает, что ключевые решения размещаются в критической полосе, и выдвигает свою гипотезу

1896

Шарль де ла Валле-Пуссен и Жак Адамар доказывают, что все нетривиальные нули функции размещаются *внутри* римановой критической полосы на четыре части и т. д., издает звуки, необходимые для музыкальной гармонии. В гармоническом ряду складываются все меньшие и меньшие дроби, а что при этом происходит с суммой? Увеличивается ли она до бесконечности или есть какой-то предел, больше которого сумма не становится никогда? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо знать один трюк — объединить члены в группы, всякий следующий раз увеличивая количество членов вдвое. Складывая первые 8 членов (и помня о том, что $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$), получим

$$S_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right),$$

где S обозначает сумму, а поскольку $^1/_3$ больше $^1/_4$, а $^1/_5$ больше $^1/_8$ (и т. д.), то приведенная сумма больше, чем

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Таким образом, можно сказать:

$$S_{2^3} > 1 + \frac{3}{2}$$

или в общем виде

$$S_{2^k} > 1 + \frac{1}{2}.$$

Если взять $k = 20$, чтобы $n = 2^{20} = 1\,048\,576$ (более миллиона членов ряда), сумма ряда едва перевалит за 11 (см. таблицу). Она растет мучительно медленно, однако значение k может быть любым, а значит, и сумма ряда может быть больше любого заданного числа, каким бы большим оно ни было. Ряд, что называется, расходится. А вот с рядом, где в знаменателях дробей квадраты, такого не происходит:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

Система та же — мы складываем все меньшие и меньшие числа, но на этот раз предел достигаем, и он меньше 2. Ряд довольно резко сходится к $\pi^2/6 = 1{,}64493\ldots$

В этом ряду степень членов — 2. В гармоническом ряду степень знаменателя по умолчанию равна 1, и в этом все дело. Если степень знаменателя увеличивается хотя бы ничтожно, становится всего лишь больше 1, ряд сходится, а если степень уменьшается хоть чуть-чуть, становится меньше 1, — ряд расходится. Гармонический ряд находится строго на границе расходимости и сходимости.

1900

Давид Гильберт помещает гипотезу Римана в свой список великих математических задач, ожидающих решения

1914

Годфри Херолд Харди доказывает, что вдоль линии Римана располагается бесконечное множество решений

2004

Доказано расположение первых 10 триллионов нулей на критической линии

Дзета-функция Римана Знаменитая дзета-функция Римана $\zeta(s)$, вообще-то, была известна еще Эйлеру в XVIII веке, однако Бернхард Риман осознал ее важность во всей полноте. ζ – греческая буква «дзета», а в записи функция выглядит так:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots$$

Были рассчитаны различные значения дзета-функции, особенно для $\zeta(1) = \infty$, поскольку $\zeta(1)$ и есть гармонический ряд. Значение для $\zeta(2)$ есть $\pi^2/6$, и этот результат получил сам Эйлер. Было доказано, что все значения $\zeta(s)$ включают π, если s – четное число, а вот с теорией для нечетных значений s куда сложнее. Роже Апери доказал важный результат: $\zeta(3)$ – иррациональное число, однако его метод не распространяется на $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ и т. д.

Гипотеза Римана Переменная s в Римановой дзета-функции является действительным числом, однако можно расширить область ее значений и на комплексные числа (см. стр. 32). Это позволяет применять к функции мощные методы комплексного анализа.

Дзета-функция Римана имеет бесконечное множество нулей, т. е. бесконечное число значений s, при которых $\zeta(s) = 0$. В работе, представленной Берлинской академии наук в 1859 году, Риман показал, что все «нетривиальные» нули дзета-функции – комплексные числа, располагающиеся в критической полосе, ограниченной $x = 0$ и $x = 1$. Кроме того, он выдвинул знаменитую гипотезу:

Все нули Римановой дзета-функции ζ (s) располагаются на линии $x = 1/2$ – серединной линии критической полосы.

Первый серьезный шаг на пути доказательства этой гипотезы был сделан в 1896 году двумя учеными независимо друг от друга – Шарлем де ла Валле-Пуссеном и Жаком Адамаром. Оба показали, что нули должны располагаться внутри критической полосы (т. е. x не может равняться ни 0, ни 1). В 1914 году английский математик Г. Х. Харди доказал, что вдоль линии $x = 1/2$ располагается бесконечное количество нулей, хотя это не исключает нахождение бесконечного количества нулей вне этой прямой.

Если говорить о численных результатах, то нетривиальные нули, рассчитанные к 1986 году (1 500 000 000 штук), действительно размещаются на линии $x = 1/2$, а согласно нынешним расчетам, это утверждение истинно для первых 100 миллиардов нулей.

Хотя эти расчетные данные предполагают разумность гипотезы Римана, по-прежнему существует вероятность того, что она ошибочна. Гипотеза утверждает, что все нули размещаются на критической прямой, и это утверждение еще предстоит доказать или опровергнуть.

Почему гипотеза Римана столь важна? Между дзета-функцией Римана и теорией простых чисел (см. стр. 36) существует некоторая неожиданная связь. Простые числа 2, 3, 5, 7, 11 и т. д. — числа, делимые только на самих себя и на 1. С простыми числами можно записать:

$$\zeta(s) = 1/\left(\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\times\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\times\ldots\right)$$

и это, оказывается, еще одна форма записи $\zeta(s)$, Римановой дзета-функции. Это означает, что наше знание дзета-функции может пролить свет на распределение простых чисел и обогатить наше понимание основ математики.

В 1900 году Давид Гильберт составил знаменитый список из 23 задач математики, которые предстояло решить ученым XX века. О восьмой задаче в списке он сказал так: «Если бы я проснулся, проспав пятьсот лет, — в первую очередь спросил бы, доказана ли гипотеза Римана?»

Харди, отправляясь в морское путешествие через Северное море после датских каникул, проведенных у друга Харалда Бора, применил гипотезу Римана как страховку. Перед тем как покинуть порт, он отправил другу открытку, в которой заявлял, что только что доказал гипотезу Римана. То была блестящая уловка, как ни поверни: если бы корабль потерпел крушение, за Харди осталась бы посмертная слава победителя великой задачи; а если Бог все-таки есть, Он не дал бы затонуть кораблю с таким отпетым атеистом, как Харди, на борту, и позволить ему получить все эти незаслуженные почести, поэтому Бог, конечно, позаботился бы в таком случае о сохранности судна.

Человек, которому удастся строго доказать эту гипотезу, достанется премия в миллион долларов, учрежденная Математическим институтом Клея. Однако деньги тут не главный стимул; большинство математиков упорно бьется за результат — и за высокое место в пантеоне математиков.

В сухом остатке: Великое дерзанье

Словарь терминов

Аксиома Утверждение, которое не требуется доказывать; применяется для определения системы. Термин «постулат» древние греки применяли в том же смысле, однако для них он означал «самоочевидную истину».

Алгебра Работает с буквами, а не с числами; как продолжение арифметики алгебра — основной метод математики и ее приложений. Слово «алгебра» происходит от «ал-джабр», возникшего в одном арабском тексте IX века.

Алгоритм Математический рецепт; набор действий для решения той или иной задачи.

Аликвотная дробь Дробь, верхняя часть которой (числитель) равна 1. Древние египтяне частично строили свою систему чисел на аликвотных дробях.

Взаимно-однозначное соответствие Особое отношение точного соответствия между каждым объектом в одном множестве и каждым объектом в другом и наоборот.

Геометрия Описывает свойства линий, фигур и пространств; была формализована Евклидом в «Началах» в III в. до н. э. Геометрия пронизывает всю математику и как область знания утеряла свои исторические ограничения.

Гипотеза Осторожное утверждение, ожидающее доказательства или опровержения. Имеет тот же математический статус, что и предположение.

Двоичная система счисления Система счисления, основанная на *двух* символах — 0 и 1; основа компьютерного счисления.

Делитель Целое число, на которое без остатка делится другое целое число. Число 2 — делитель числа 6, потому что 6 ÷ 2 = 3. Аналогично 3 — еще один делитель числа 6, потому что 6 ÷ 3 = 2.

Диаграмма Аргана Наглядный метод описания двухмерной плоскости комплексных чисел.

Диаграмма Венна Графическое изображение (круговая диаграмма), применяемое в теории множеств.

Диофантово уравнение Уравнение, решением которого может быть только целое число. Названо в честь греческого математика Диофанта Александрийского (ок. 250 н. э.).

Дискретный Термин, противоположный по смыслу к «непрерывный». Между дискретными значениями есть дыры — как между целыми числами, например: 1, 2, 3, 4...

Дифференцирование Одна из основных операций математического анализа; ее результат — производная, или размер изменения. Например, для выражения, описывающего, как расстояние зависит от времени, производной является скорость. Производная выражения для скорости есть ускорение.

Дробь Целое число, деленное на другое, например, $^3/_7$.

Знаменатель дроби Нижняя часть дроби. В $^3/_7$ знаменатель — 7.

Интегрирование Одна из основных операций математического анализа; ее результат — размер площади. Можно показать, что интегрирование обратно дифференцированию.

Иррациональные числа Числа, которые нельзя записать в виде обыкнованных дробей (например, квадратный корень из 2).

Итерация Повторная операция, начатая с некоторого значения *a*. Например, начинаем с 3 и последовательно прибавляем 5, получаем итерационную последовательность 3, 8, 13, 18, 23, ...

Квадратное число Результат умножения целого числа на себя само. Число 9 — квадратное, потому что 9 = 3 × 3. Примеры квадратных чисел: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

Квадратный корень Число, результат умножения которого на само себя равен некоему заданному числу. Например, 3 есть квадратный корень из 9, потому что 3 × 3 = 9.

Квадратура круга Задача построения квадрата с той же площадью, что и заданный круг, при помощи циркуля и линейки. Эта задача не решаема.

Кватернионы Четырехмерные мнимые числа, открытые У. Р. Гамильтоном.

Коммутативность Умножение в алгебре коммутативно, т. е. $a \times b = b \times a$ — как и в обычной арифметике (например, 2 × 3 = 3 × 2). Во многих областях современной алгебры это не так (например, в матричной).

Коническое сечение Общее название классического семейства кривых, включающее окружности, прямые, эллипсы, параболы и гиперболы. Любую такую кривую можно получить сечением конуса.

Контрпример Пример, опровергающий истинность утверждения. Утверждение «все лебеди белые» — ложно, доказательство — контрпример «черный лебедь».

Лемма Утверждение, доказанное как мостик к доказательству более значимой теоремы.

Матрица Набор чисел или символов, организованный в виде квадрата или прямоугольника. Эти наборы можно складывать и умножать; они являются алгебраическими системами.

Мнимые числа Числа, включающие «мнимое» $i = \sqrt{-1}$. В комбинации с обыкновенными («действительными», или «вещественными») числами из них получаются комплексные числа.

Многогранник Объемная фигура со многими гранями. Например, тетраэдр – фигура с четырьмя гранями, а куб – с шестью.

Множество Набор объектов; например, множество предметов мебели можно записать как F = {стул, стол, диван, табурет, буфет}.

Мощность Количество объектов в множестве. Мощность (кардинальное число) множества $\{a, b, c, d, e\}$ равно 5, но у мощности может быть значение и в случае бесконечных множеств.

Наибольший общий делитель, НОД НОД двух чисел – наибольшее число, на которое эти два числа делятся без остатка. Например, 6 – НОД чисел 18 и 84.

Оптимальное решение Многие задачи требуют наилучшего или оптимального решения, будь то минимизация стоимости или максимизация прибыли, как в линейном программировании.

Оси x–y Концепция присвоения точкам координат x (по горизонтальной оси) и y (по вертикальной оси), предложенная Рене Декартом.

Основание Основа той или иной системы счисления. Вавилоняне основывали свою систему счисления на 60; современная система счисления основана на 10 (десятеричная).

Остаток Если разделить одно целое число на другое не нацело, то, что останется, называется остатком. Число 17, деленное на 3, дает 5 и остаток 2.

Позиционная система Величина числа зависит от позиций цифр, в него входящих. В числе 73 позиция цифры 7 означает «7 десятков», а 3 – «3 единицы».

Показатель степени Форма записи, применяемая в арифметике. Умножение числа на себя само – 5 × 5, записывается 5^2, показатель степени – 2. Выражение 5 × 5 × 5 записывается как 5^3 и т. д. Такую запись можно расширить: например, число $5^{1/2}$ означает квадратный корень из 5.

Последовательность Набор элементов (возможно бесконечный) – чисел или символов.

Простое число Целое число, которое делится только на 1 и на себя само. Например, 7 – простое число, а 6 – нет (потому что 6 ÷ 2 = 3). Традиционно ряд простых чисел начинается с 2.

Простые числа-близнецы (парные простые числа) Пары простых чисел, отличающихся на два. Например, 11 и 13 – близнецы. Бесконечно ли количество таких близнецов, неизвестно.

Пустое множество Множество, не содержащее членов. Традиционно обозначается ∅. Полезное понятие теории множеств.

Распределение Диапазон вероятностей событий, возникает в ходе эксперимента или стечения обстоятельств. Например, распределение Пуассона описывает вероятности x появлений редкого события – для каждого значения x.

Рациональные числа Числа, являющиеся либо целыми, либо дробями.

Ряд Набор элементов (возможно бесконечный) – чисел или символов, – сложенных друг с другом.

Симметрия Упорядоченность фигуры. Если фигуру можно повернуть так, чтобы она совпала с исходным изображением себя самой, это означает, что у нее есть так называемая вращательная симметрия. У фигуры есть зеркальная симметрия, если ее зеркальное отображение совпадает с ней самой.

Теорема Пифагора Если стороны прямоугольного треугольника имеют длины x, y и z, тогда верно равенство $x^2 + y^2 = z^2$, где z – длина наибольшей стороны (гипотенузы), противолежащей прямому углу.

Теорема Термин, обозначающий установленный факт, имеющий определенные последствия.

Теория хаоса Теория динамических систем, кажущихся с виду случайными, но имеющих скрытую упорядоченность.

Трансцендентное число Число, которое не может быть решением алгебраического уравнения типа $ax^2 + bx + c = 0$ или такого, где степень x еще выше. Число π трансцендентно.

Числитель Верхняя часть дроби. В дроби $^3/_7$ число 3 – числитель.

Шестнадцатеричная система Система счисления по основанию 16, на 16 символах: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E и F. Имеет широкое применение в компьютерном счислении.

Предметный указатель

Страницы, выделенные полужирным, содержат определение понятия.

ББК 84.4
К82

Тони Крилли – преподаватель факультета математики Мидлсекского университета, работал в университете Мичигана, университете Гонконга и Открытом университете. В центре его научных интересов – история математики. Он автор биографии знаменитого английского математика Артура Кэли, а также множества книг по информатике, теории фракталов и теории хаоса.

Крилли, Тони

К82 Математика. 50 идей, о которых нужно знать. – Пер. с англ. Ш. Мартыновой. – М.: Фантом Пресс, 2014. – 208 с.

Математика, Снежная королева наук, чарует и вызывает священный трепет у каждого, кто соприкасается с ней, даже у самого завзятого гуманитария. Всю математику не под силу знать никому, она слишком многообразна, но основные идеи, что определили и определяют нашу жизнь, надо знать всем. Том «Математика» – сжатый, но идеально выверенный экскурс в эту великую и прекрасную науку, это головокружительный полет над лунным пейзажем ее неумолимой, строгой красоты. Со многими идеями, изложенными в этой книге, читатель наверняка знаком, но «Математика» предлагает то, что не дают учебники, – постичь красоту математических идей, увидеть, как математика связана с жизнью, искусством, политикой, экономикой. Эта книга может стать подспорьем и для тех, кто решил развеять свое математическое невежество, и для тех, кто хочет освежить свои познания в этой самой магической науке. Здесь собраны 50 главных математических идей – как очень простых, так и изумляющих своей великой непостижимостью.

ISBN 978-5-86471-670-0

Тони Крилли
МАТЕМАТИКА
50 идей,
о которых нужно знать
Перевод
Шаши Мартынова
Редакторы
Макс Немцов, Игорь Алюков
Консультант
Екатерина Сорочан
Корректоры
Ольга Андрюхина,
Виктория Рябцева
Директор издательства
Алла Штейнман

Подписано в печать 24.03.2014.
Формат 70×90/16.
Печать офсетная.
Заказ № 1403170.
Тираж 3000 экз.
Гарнитура «NewBaskervilleC».

Издательство «Фантом Пресс»:
Лицензия на издательскую деятельность
код 221 серия ИД № 00378
от 01.11.99 г.
127015 Москва,
ул. Новодмитровская, д. 5А, 1700
Тел.: (495) 787-34-63
Электронная почта:
phantom@phantom-press.ru
Сайт: www.phantom-press.ru

Отпечатано
в полном соответствии
с качеством
предоставленного
электронного
оригинал-макета
в ОАО «Ярославский
полиграф-комбинат»
150049, Ярославль,
ул. Свободы, 97

По вопросам реализации обращайтесь:
ЗАО «**Книжный клуб 36.6**»
Офис: Москва, Бакунинская ул.,
дом 71, строение 10
Почтовый адрес: 107078, Москва, а/я 245
Многоканальный телефон:
+7 (495) 926-45-44
e-mail: club366@club366.ru
www.club366.ru